Exponentialfamilien bei Irrfahrten

Heinz Siegel.

Diss. Düsseldorf

1983

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Exponentialfamilien bei Irrfahrten

Heinz Siegel

Düsseldorf 1983

Exponentialfamilien bei Irrfahrten

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Düsseldorf

vorgelegt von

Heinz Siegel

aus Düsseldorf

Düsseldorf

1983

1.Berichterstatter: Prof. Dr. K. Janßen

2.Berichterstatter: Prof. Dr. H. Klinger

Tag der mündlichen Prüfung: 22.7.1983

ZUSAMMENFASSUNG

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, auf topologischen Gruppen bzw. Halbgruppen, die lokalkompakt sind und eine abzählbare Basis besitzen, Exponentialfamilien durch damit assoziierte Raum-Zeit-Markoffketten zu Irrfahrten zu charakterisieren. Die Untersuchung dieser Thematik geht auf Abrahamse zurück, der Irrfahrten auf der Gruppe $(Z,+)$ betrachtet.
Es wird gezeigt, daß sich unter der Bedingung (*) "Die Konstante 1 ist extremal für die Raum-Zeit-Kette" die Menge der Raum-Zeit-harmonischen Exponentiale als Teilmenge des Martinrandes interpretieren läßt, wenn man die Punkte des wesentlichen Teils des Martinrandes mit den entsprechenden extremalen harmonischen Funktionen identifiziert.
Die Bedingung (*) ist erfüllt für diskrete Gruppen (nach dem Satz von Choquet-Deny) und auch für diskrete Halbgruppen, wie man zeigen kann.
Für allgemeine Gruppen wird ein notwendiges und hinreichendes Kriterium angegeben. Folgende drei Bedingungen sind äquivalent:

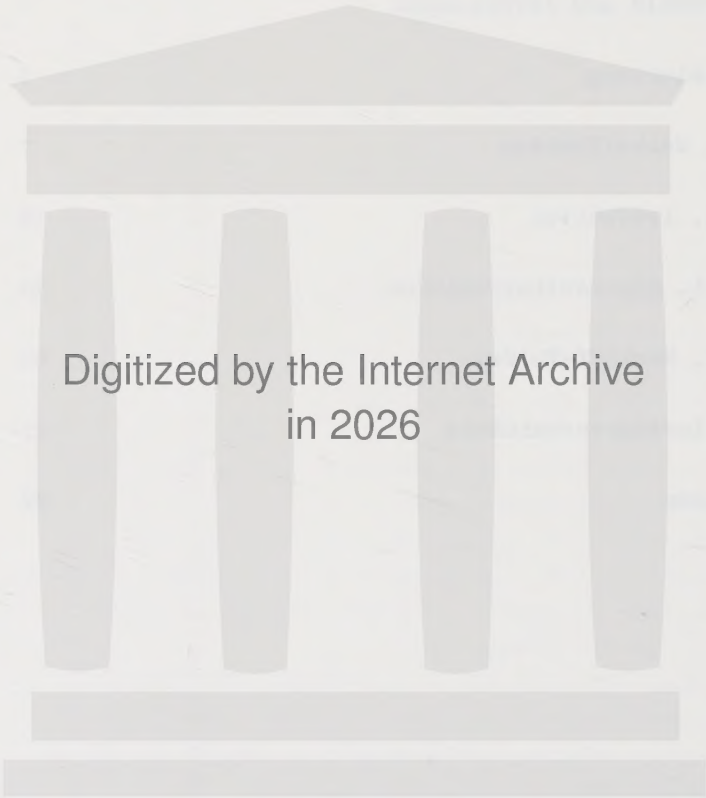
a) (*) ist erfüllt.
b) Die Verteilung der Irrfahrt ist "ausgebreitet bezgl. des Haarmaßes".
c) Die Irrfahrt ist "stetig im Unendlichen".

Speziell ist die Konstante 1 für die Raum-Zeit-Kette genau dann extremal, wenn sie extremal für die Kette auf der Gruppe ist.
Für Raum-Zeit-Ketten zu Irrfahrten auf Gruppen mit ausgebreiteter Verteilung, insbesondere also auf diskreten Gruppen, sind stetige, extremale Funktionen genau die harmonischen Exponentiale.
Für Gruppen erhält man also befriedigende Resultate, während für Halbgruppen noch Fragen offenbleiben.
Man kann obige Resultate auf die Theorie der Markoff-Felder anwenden: So sind unter geeigneten Bedingungen extremale Markoff-Felder mit Parameterraum $\mathbb{N}_0$ genau die Raum-Zeit-Ketten einer Exponentialfamilie auf einer diskreten Gruppe E. Ist E endliche Gruppe, so findet in $E^{\mathbb{N}_0}$ kein Phasen-Übergang statt, da auf E außer der Konstanten 1 keine Exponentiale existieren.

UNIV. LEIDEN BIBL.

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Symbole und Abkürzungen	1
Einleitung	3
I. Markoffketten	7
II. Irrfahrten	18
III. Exponentialfamilien	30
IV. Markoff-Felder	62
Literaturverzeichnis	78
Index	82


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543926_0063

SYMBOLE UND ABKÜRZUNGEN

$:=$	definitionsgemäß gleich
$\exists$	es existiert
$\forall$	für alle
$\rightarrow$, $\longrightarrow$	Implikation
$\leftrightarrow$	(logische)Äquivalenz
$\square$	Ende eines Beweises
$\complement A$	Komplement von A
$\mathcal{P}(E)$	Potenzmenge von E
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_+$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
$(E, \mathcal{E})$	Meßraum,d.h. $\mathcal{E}$ σ-Algebra in E
$(E, \mathcal{E}, \mu)$	Maßraum;W(ahrscheinlichkeits)-Raum,falls μ W-Maß.
$\sigma(\mathcal{F})$	die von $\mathcal{F}$ ($\subset \mathcal{E}$) in E erzeugte σ-Algebra
$f \in \underline{\mathcal{E}}$	$f: E \rightarrow \mathbb{R}$ mit f $\mathcal{E}$-$\mathcal{B}$ meßbar($\mathcal{B}$ σ-Algebra der Borelmengen in $\mathbb{R}$)
$f \in \underline{\mathcal{E}}_+$	$f \in \underline{\mathcal{E}}$ und $f \geq 0$
1_A	Indikatorfunktion der Menge A
ε_x	Einheitsmasse im Punkte x
f.s.	fast sicher
[P]	P-fast sicher
ZV	Zufallsvariable
$\int_E f \, d\mu$	Integral von $f(\in \underline{\mathcal{E}})$bezgl.$\mu$,falls existent. Bezeichnung auch: $\langle f, \mu \rangle$
E [f]	$\int f \, d\mu$, Erwartungswert von f
E [f | $\mathcal{F}$]	bedingte Erwartung von f bezgl.$\mathcal{F}$ ($\subset \mathcal{E}$)
$X(\mu)$	Bildmaß von X bezgl.μ
$T(\mu)$	Träger des Maßes μ
$G(\mu)$	kleinste abgeschlossene Gruppe oberhalb $T(\mu)$
$H(\mu)$	kleinste abgeschlossene Halbgruppe oberhalb $T(\mu)$

$\lambda \ll \mu$	λ ist μ-stetig
$f\mu$	Maß mit Dichte f bezgl. des Maßes μ
$\mu \perp \nu$	μ ist singulär zu ν
$\|\mu\|$	$\mu(E)$, falls μ endliches Maß auf $\mathcal{E}$ ist.
$\mathcal{M}_1(E)$	Menge aller W-Maße auf $\mathcal{E}$
$\mu(x)$	$\mu(\{x\})$, falls $x \in E$ und $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$.

Falls $(E, \mathcal{O})$ topologischer Raum und $\mathcal{E} := \mathcal{A}(\mathcal{O})$ die σ-Algebra der Borelmengen in E ist:

$C(E)$	$\{ f \in \mathcal{E} \mid f$ stetig und beschränkt $\}$
$C_k(E)$	$\{ f \in C(E) \mid f$ besitzt kompakten Träger $\}$

EINLEITUNG

Das Objekt der vorliegenden Arbeit sind Raum-Zeit-Ketten zu Irrfahrten auf topologischen Gruppen bzw. Halbgruppen (mit Einselement), die lokalkompakt sind und eine abzählbare Basis besitzen (LKAB). Die Irrfahrten sind als Markoffketten durch einen Faltungskern und damit durch ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der (Halb-)Gruppe G bestimmt.
Betrachtet man jetzt zu einem W-Maß μ auf G für ϑ aus einer Parametermenge Θ die Exponentialfamilie $(\mu_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta}$ von W-Maßen mit Dichten $\xi_\vartheta \cdot Z(\vartheta)$ bezgl. μ, wobei ξ_ϑ Exponential der (Halb-)Gruppe G und $Z(\vartheta)$ Normierungskonstante ist, so gilt (vgl. 3.5):
Die Funktionen h_ϑ mit $h_\vartheta(x,n) = \xi_\vartheta(x)\cdot Z(\vartheta)^n$ für $(x,n)\in G\times\mathbb{N}_0$ sind harmonisch für die Raum-Zeit-Kette zur Irrfahrt mit Verteilung μ, und die h_ϑ-Ketten sind die Raum-Zeit-Ketten zur Irrfahrt mit Verteilung μ_ϑ (vgl. 3.4.1). Die h_ϑ sind sogar extremal, falls die folgende Bedingung erfüllt ist:
(B3) Für jedes $\vartheta\in\Theta$ ist die Konstante 1 extremal für die Raum-Zeit-Kette zur Irrfahrt mit Verteilung μ_ϑ.
Da für Raum-Zeit-Ketten zu Irrfahrten auf Gruppen die Voraussetzungen zur Konstruktion des Martinrandes erfüllt sind, läßt sich unter geeigneten Integrabilitätsbedingungen in diesem Zusammenhang die Parametermenge Θ als Teilmenge des Martinrandes interpretieren, wenn man die Punkte des wesentlichen Teils des Martinrandes mit den entsprechenden extremalen Funktionen identifiziert (vgl. 3.17). Insbesondere konvergiert dann die Raum-Zeit-Kette zur Irrfahrt mit Verteilung μ_ϑ in der Topologie der Martin-Kompaktifizierung gegen den Parameter ϑ.
Betrachtet man umgekehrt für eine Parametermenge Θ eine Familie $(\mu_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta}$ von W-Maßen auf einer (Halb-) Gruppe G mit einem dominierenden Maß μ_{ϑ_0} für ein $\vartheta_0\in\Theta$, so sind die zugehörigen Dichten bereits von der oben angegebenen Form, d.h. es handelt sich um

eine Exponentialfamilie (vgl. 3.24 und 3.2), im wesentlichen falls neben (B3) zusätzlich noch folgende Bedingung erfüllt ist:

(B4) Extremale Funktionen für die Raum-Zeit-Kette zur Irrfahrt mit Verteilung μ_x sind bereits Exponentiale auf $G \times \mathbb{N}_0$.

Insbesondere stellt sich also die Frage, unter welchen Voraussetzungen für W-Maße auf der (Halb-) Gruppe G die Bedingung (B3) und (B4) erfüllt sind.
Die Untersuchung dieser Frage geht auf ABRAHAMSE[1] zurück, der den Fall der Gruppe $(\mathbb{Z},+)$ betrachtet. ABRAHAMSE beobachtet die Ketten auf dem "natürlichen" Zustandsraum $E'=\{(x,n)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}_0 \mid P_0(X_n=x)>0\}$, also auf dem Bereich, in dem sich die Kette bei Start im Punkte 0 fast sicher aufhält.
Dieses Konzept hat sich aber nicht bewährt, da im Gegensatz zur Behauptung von ABRAHAMSE Exponentiale auf E' im allgemeinen nicht als Produkte von Exponentialen auf G und $\mathbb{N}_0$ darstellbar sind (vgl. 3.13).
Hier werden die Raum-Zeit-Ketten (zur Irrfahrt mit Verteilung μ) auf dem Produktraum $G \times \mathbb{N}_0$ betrachtet, wobei vorausgesetzt wird (vgl. 3.7):

(GT)/(HT) Bei Start in einem beliebigen Punkt aus $G \times \mathbb{N}_0$ gelangt man mit strikt positiver Wahrscheinlichkeit in die vom Träger von $\mu \otimes \epsilon_1$ erzeugte (Halb-)Gruppe.

Für den Fall G=Z besagt (HT) gerade: Bei Start in einem beliebigen Punkt gelangt man mit strikt positiver Wahrscheinlichkeit nach E'.
Die Bedingung (B3) gilt auf der Gruppe $(\mathbb{Z}^d,+)$ $(d\in\mathbb{N})$, wie DOOB-SNELL-WILLIAMSON [9] zeigten. Für die weitere Untersuchung der Gültigkeit von (B3) ist grundlegend der Satz von Choquet-Deny:
Beschränkte, stetige, harmonische Funktionen sind konstant für Irrfahrten auf Gruppen. Dieser Satz läßt sich auf Halbgruppen ausweiten (vgl. 3.9 und 3.10), also gilt (B3) für alle diskreten (Halb-)Gruppen (vgl. 3.11).

Für allgemeine Gruppen läßt sich ein notwendiges und hinreichendes Kriterium angeben (vgl. 3.20). Folgende drei Bedingungen sind äquivalent:

a) Die Konstante 1 ist extremal für die Raum-Zeit-Kette zur Irrfahrt mit Verteilung μ.

b) Die Verteilung μ der Irrfahrt ist ausgebreitet bezgl. des Haarmaßes (vgl. 2.19.1).

c) Die Irrfahrt ist stetig im Unendlichen (vgl. 3.18).

Speziell gilt: (B3) ist erfüllt, wenn eine der drei Bedingungen für das dominierende Maß der Exponentialfamilie erfüllt ist.

Die Konstante 1 ist genau dann extremal für die Raum-Zeit-Kette auf $G \times \mathbb{N}_0$, wenn sie extremal für die Irrfahrt auf der Gruppe ist (vgl. 3.21).

An zwei Beispielen (vgl. 3.22 und 3.23) wird gezeigt, welche Phänomene im Zusammenhang mit (überabzählbaren) Halbgruppen, bei denen im allgemeinen kein "Haarmaß" existiert, auftreten.

Bei der Frage der Gültigkeit von (B4) wird für Raum-Zeit-Ketten zu Irrfahrten auf Gruppen folgendes gezeigt (vgl. 3.28):

Stetige, extremale Funktionen sind (bis auf konstante Vielfache) Exponentiale, also ist (B4) für diskrete Gruppen erfüllt.

Da Exponentiale auf Gruppen stetig sind, gilt (vgl. 3.30): Für die Raum-Zeit-Kette zu einer Irrfahrt auf der Gruppe G mit bezgl. des Haarmaßes ausgebreiteter Verteilung, die (GT) erfüllt, sind stetige, extremale Funktionen (bis auf konstante Vielfache) genau die Funktionen h auf $G \times \mathbb{N}_0$ mit $h(x,n) = \xi(x) \cdot Z^n$, wobei ξ Exponential auf G und Z Normierungskonstante ist.

Für nicht diskrete Halbgruppen ist diese Aussage im allgemeinen falsch (vgl. 3.31).

Für Gruppen erhält man also befriedigende Resultate, während für Halbgruppen noch manches ungeklärt bleibt.

Im letzten Kapitel werden diese Resultate auf die Theorie der Markoff-Felder angewendet, wobei allerdings auf die sonst übliche Voraussetzung strikt positiver Zylinderwahrscheinlichkeiten verzichtet wird.
Unter geeigneten Voraussetzungen sind extremale Markoff-Felder mit Parameterraum $\mathbb{N}_0$ genau die Raum-Zeit-Ketten einer Exponentialfamilie auf der diskreten Gruppe E (vgl. 4.22). Es ergeben sich Resultate, die ihr Analogon in der zum Beispiel von DOBRUSHIN[6] untersuchten Situation des Parameterraumes Z finden: Unter entsprechenden Bedingungen findet für endliche Gruppen kein Phasen-Übergang statt (vgl. 4.24).

I. MARKOFFKETTEN

In diesem Einleitungskapitel werden die für die vorliegende Arbeit grundlegenden Fakten und Objekte dargestellt. Die folgenden Definitionen und Sätze findet man - sofern nicht anders vermerkt - bei REVUZ [20] . Die Sätze werden hier ohne Beweise angegeben.

1.1 Operationen mit Kernen

Ein Kern Q auf einem Meßraum $(E,\mathcal{E})$ ist eine Abbildung $Q : E \times \mathcal{E} \longrightarrow [0,\infty]$ mit den beiden folgenden Eigenschaften:
a) für alle $x \in E$ ist $Q(x,.)$ ein Maß auf $\mathcal{E}$,
b) für alle $A \in \mathcal{E}$ ist $Q(.,A)$ $\mathcal{E}$-meßbar.

Der Kern heißt Übergangskern ($\ddot{U}$-Kern), falls $Q(.,E) \leq 1$, und Markoffsch, falls $Q(.,E) \equiv 1$.

Für eine $\mathcal{E}$-meßbare Funktion f mit $f \geq 0$ sei

$Qf(x) := \int f(y)Q(x,dy)$ $(x \in E)$. Dann ist Qf $\mathcal{E}$-meßbar und $Qf \geq 0$.

Für ein Maß ϱ auf $\mathcal{E}$ sei $\varrho Q(A) := \int Q(y,A)\,\varrho(dy)$ $(A \in \mathcal{E})$. Dann ist ϱQ ein Maß auf $\mathcal{E}$.

Für $f \in \underline{\mathcal{E}}_+$ gilt : $\langle f, \varrho Q \rangle = \langle Qf, \varrho \rangle$.

Das Produkt zweier Kerne M und N auf $(E,\mathcal{E})$ definiert man als $MN(x,A) := \int N(y,A)M(x,dy)$ $(x \in E,\ A \in \mathcal{E})$.

MN ist wieder Kern auf $(E,\mathcal{E})$, und die Produktbildung ist assoziativ.
Induktiv definiert man das n-fache Produkt eines Kernes Q:

$Q^0 := I$, wobei für $x \in E$ $I(x,.) := \varepsilon_x$ ist, und

$Q^n := QQ^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Ist E abzählbar und $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$, so sei für $x,y \in E$
$Q(x,y) := Q(x,\{y\})$.

1.2 Markoffketten

1.) Im weiteren sei $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ein W-Raum, $(E, \mathcal{E})$ ein Meßraum (auch Zustandsraum genannt), Q ein Markoffscher Kern auf $(E, \mathcal{E})$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von $(\Omega, \mathfrak{F}) - (E, \mathcal{E})$ Zufallsvariablen. Für $n\in\mathbb{N}$ heißt $\mathfrak{F}_n := \sigma(X_m, m\leq n)$ σ-Algebra der Vergangenheit (bis zum Zeitpunkt n).

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt (homogene) Markoffkette bezgl. Q, falls gilt:

Für $m,n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$ und für $f \in \mathcal{E}_+$ ist

$$E[f(X_n) \mid \mathfrak{F}_m] = Q^{n-m}f(X_m) \quad [P].$$

2.) Ist E abzählbar und $\mathcal{E} = \mathfrak{P}(E)$, so ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ genau dann Markoffkette, wenn die beiden folgenden Bedingungen für jedes $n\in\mathbb{N}$ erfüllt sind:

a) Markoff-Eigenschaft

Für $a_i \in E$ $(i=0,..,n)$ mit $P[X_i=a_i, i=0,..,n-1] > 0$ gilt:

$$P[X_n=a_n \mid X_i=a_i, i=0,..,n-1] = P[X_n=a_n \mid X_{n-1}=a_{n-1}].$$

b) Homogenität

Für $a,b\in E$ mit $P[X_{n-1}=a] > 0$ gilt:

$$P[X_n=b \mid X_{n-1}=a] = Q(a,b).$$

3.) $\varphi := X_0(P)$ heißt Startmaß.

4.) Im folgenden kommen auch σ-endliche Maße auf $\mathfrak{F}$ und $\mathbb{H}$-Kerne auf $(E, \mathcal{E})$ vor. Man spricht dann ebenfalls von Markoffketten (siehe auch 1.3.2).

1.3 Kanonische Markoffkette

Von großer Bedeutung ist die Tatsache, daß zu vorgegebenem Übergangskern und Startmaß stets eine homogene Markoffkette konstruierbar ist.

1.) Dazu sei Q ein Markoffscher Kern auf dem Meßraum $(E, \mathcal{E})$.
$\Omega := E^{\mathbb{N}_0}$, $\mathcal{F} := \bigotimes_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{E}$. $(\Omega, \mathcal{F})$ heißt kanonischer Meßraum.
Die Punkte $\omega \in \Omega$ werden als Pfade oder Trajektorien bezeichnet. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $X_n : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (E, \mathcal{E})$ die n-te Projektionsabbildung, d.h. für $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sei $X_n(\omega) := \omega_n$.
Es ist dann $\mathcal{F} = \mathfrak{A}(X_n, n \in \mathbb{N}_0) = \mathfrak{A}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{F}_n\right)$.
Außerdem existiert eindeutig zu jedem $x \in E$ ein W-Maß P_x auf $\mathcal{F}$, so daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede Funktion $g \in \underline{\mathcal{E}}_+^{n+1}$ gilt:

$$\int g(X_0, .., X_n)\, dP_x = \int .. \int g(x, x_1, .., x_n) Q(x, dx_1) .. Q(x_{n-1}, dx_n).$$

Für $F \in \mathcal{F}$ ist die Abbildung $x \to P_x(F)$ $\mathcal{E}$-meßbar.

2.) Für σ-endliches Maß ς auf $\mathcal{E}$ definiert man $P_\varsigma(F) := \int P_x(F)\, \varsigma(dx)$ für $F \in \mathcal{F}$. Dann ist P_ς σ-endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$.
Die auf dem Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, P_\varsigma)$ definierte Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist Markoffkette mit Übergangskern Q und Startmaß ς. Diese Markoffkette heißt kanonische Markoffkette zu Q und ς.
Ist ς W-Maß, so befindet man sich in der Situation von 1.2.1.

3.) Ist Q Übergangskern, so läßt sich durch Fortsetzen von Q zu einem Markoffschen Kern eine analoge Konstruktion der kanonischen Markoffkette durchführen.

4.) Für eine Folge von Übergangskernen $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ kann man analog eine kanonische Markoffkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konstruieren, wobei der Übergang vom Zeitpunkt n zum Zeitpunkt n+1 durch Q_n bestimmt wird. Diese Kette ist genau dann homogen, wenn $Q_n = Q_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

1.4 Raum-Zeit-Kette

Für einen Ü-Kern Q auf $(E,\mathcal{E})$ läßt sich durch

$$\tilde{Q}[(x,n),(A,m)] := \begin{cases} Q(x,A) & \text{für } m=n+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (x\in E, A\in\mathcal{E}; n,m\in\mathbb{N}_0)$$

ein Ü-Kern auf $(E\times\mathbb{N}_0, \mathcal{E}\otimes\mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$ definieren. Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Markoffkette mit Ü-Kern Q und Startmaß ς, dann ist $(\tilde{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $\tilde{X}_n := (X_n,n)$ Markoffkette mit Ü-Kern Q und Startmaß $\varsigma\otimes\varepsilon_0$.

$(\tilde{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt Raum-Zeit-Kette (R-Z-Kette) zu Q und ς.

1.5 Shift-Operator

1.) Die Punkttransformation $\theta_n: \Omega\to\Omega$ $(n\in\mathbb{N}_0)$, definiert durch $\theta_n(\omega_0,\omega_1,..) := (\omega_n,\omega_{n+1},..)$, heißt (n-facher) Shift-Operator.

$\mathcal{G}_n := \mathcal{A}(X_m, m\geq n)$ $(n\in\mathbb{N}_0)$ heißt σ-Algebra der Zukunft (ab dem Zeitpunkt n). Dann ist θ_n $\mathcal{G}_n$-$\mathcal{F}$-meßbar, und es gilt: Für $n,m\in\mathbb{N}_0$ ist $X_n\circ\theta_m = X_{n+m}$.

Für eine positive Zufallsvariable Z auf $(\Omega,\mathcal{F})$ und $n\in\mathbb{N}_0$ gilt: $E_\varsigma[Z\circ\theta_n \mid \mathcal{F}_n] = E_{X_n}[Z]$ $[P_\varsigma]$ (ς Startmaß).

2.) $\Gamma\in\mathcal{F}$ heißt invariant (unter θ_1), falls $\theta_1^{-1}(\Gamma)=\Gamma$ ist. Die σ-Algebra $\mathcal{J} := \{\Gamma\in\mathcal{F} \mid \theta_1^{-1}(\Gamma)=\Gamma\}$ heißt σ-Algebra der invarianten Ereignisse. Eine Zufallsvariable Z heißt invariant, falls Z $\mathcal{J}$-meßbar ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $Z\circ\theta_1 = Z$ gilt.

3.) $A\in\mathcal{F}$ heißt asymptotisch, falls $A\in\mathcal{G}_\infty := \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0}\mathcal{G}_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0}\mathcal{A}(X_m, m\geq n)$ gilt. Die σ-Algebra der asymptotischen Ereignisse $\mathcal{G}_\infty$ heißt auch σ-Algebra der terminalen Ereignisse von $(\mathcal{A}(X_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$.
Es ist $\mathcal{J}\subset\mathcal{G}_\infty$.

1.6 Harmonische und extremale Funktionen

1.) Sei h eine $\mathcal{E}$-meßbare Funktion mit $0 \leq h < \infty$ und Q ein Ü-Kern auf $(E, \mathcal{E})$.
h heißt (Q-)harmonisch in einem Punkt $x \in E$, falls $Qh(x) = h(x)$.
h heißt (Q-)harmonisch, falls h in allen Punkten $x \in E$ (Q-)harmonisch ist.

2.) Für harmonisches h kann man den h-Kern definieren:

$$Q^h(x,A) := \begin{cases} h(x)^{-1} \int_A h(y) Q(x,dy) & \text{für } h(x) > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (x \in E, A \in \mathcal{E}).$$

Q^h ist Ü-Kern auf $(E, \mathcal{E})$.
Für ein σ-endliches Maß ς auf $\mathcal{E}$ sei $P^h_{h\varsigma}$ das Maß auf dem kanonischen Meßraum $(\Omega, \mathfrak{F})$, für das $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ homogene Markoffkette mit Ü-Kern Q^h und Startmaß $h\varsigma$ ist.
$(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ heißt h-Kette. Für $A_i \in \mathcal{E}$ $(i=0,..,n)$ gilt dann:

$$P^h_{h\varsigma}[X_0 \in A_0, .., X_n \in A_n] = E_\varsigma[1_{A_0}(X_0) \cdot \ldots \cdot 1_{A_n}(X_n) h(X_n)]$$
$$= \int_{A_0} \varsigma(dx)\, E_x[1_{A_1}(X_1) \cdot \ldots \cdot 1_{A_n}(X_n) h(X_n)],$$

und für $x \in \{h > 0\}$ ist

$$P^h_x[X_0 \in A_0, .., X_n \in A_n] = h(x)^{-1} E_x[1_{A_1}(X_1) \cdot \ldots \cdot 1_{A_n}(X_n) h(X_n)].$$

Für eine Funktion $f \in \underline{\mathcal{E}}_+$ gilt:
$f \cdot 1_{\{h>0\}}$ ist genau dann Q^h-harmonisch, wenn $f \cdot h$ Q-harmonisch ist. Q^h-harmonische Funktionen sind 0 auf $\{h = 0\}$.

3.) Für eine Raum-Zeit-harmonische (also $\tilde{\partial}$-harmonische) Funktion k und für $x \in E$ mit $k(x,0) > 0$ existiert dann ein Maß P^k_x auf $(\Omega, \mathfrak{F})$, für das $\tilde{X}_n = (X_n, n)$ Markoffkette mit Ü-Kern Q^k (der k-Kern zu Q) und Startmaß $\varepsilon_{(x,0)}$ ist. Für $A_i \in \mathcal{E}$ $(i=0,..,n)$ gilt dann:

$$P^k_x[X_0 \in A_0, .., X_n \in A_n] = k(x,0)^{-1} E_x[1_{A_1}(X_1) \cdot \ldots \cdot 1_{A_n}(X_n) k(X_n, n)].$$

4.) Eine Funktion h ist genau dann Q-harmonisch, wenn für jedes $x \in E$ $(h(X_n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ Martingal bezgl. der σ-Algebren $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und der W-Maße P_x ist.
Eine Funktion k ist genau dann $\tilde{Q}$-harmonisch (also R-Z-harmonisch), wenn für jedes $(x,m) \in E \times \mathbb{N}_0$ $(k(X_{n+m}, n+m))_{n \in \mathbb{N}_0}$ Martingal bezgl. der σ-Algebren $(\mathcal{F}_{n+m})_{n \in \mathbb{N}_0}$ und der W-Maße P_x ist.

5.) Eine Q-harmonische Funktion $h \neq 0$ heißt <u>extremal</u>, falls gilt:
Ist f eine weitere Q-harmonische Funktion mit $f \leq h$, dann existiert eine reelle Zahl $t \in [0,1]$ mit $t \cdot h = f$. Harmonische Funktionen unterhalb h sind also bereits proportional zu h.

6.) Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:
a) Die Funktion h ist Q-extremal.
b) Die Funktion $1_{\{h>0\}}$ ist Q^h-extremal.
c) Die beschränkten Q^h-harmonischen Funktionen sind konstant auf $\{h>0\}$.

Speziell ist die Konstante 1 genau dann Q-extremal, wenn die beschränkten Q-harmonischen Funktionen konstant sind.

7.) Die beschränkten Q-harmonischen Funktionen sind genau dann konstant (auf E), wenn die σ-Algebra $\mathcal{J}$ der invarianten Ereignisse f.s. trivial ist, d.h. wenn $P_\cdot(\Gamma)$ für $\Gamma \in \mathcal{J}$ identisch 0 oder 1 ist (REVUZ [20], III.3.5).

8.) Die beschränkten $\tilde{Q}$-harmonischen Funktionen (also die für die R-Z-Kette) sind genau dann konstant (auf $E \times \mathbb{N}_0$), wenn die σ-Algebra $\mathcal{J}_\infty$ der terminalen Ereignisse f.s. trivial ist (REVUZ [20], VI.2.4).

9.) Ist h eine Q-harmonische Funktion, dann wird für $(x,n) \in E \times \mathbb{N}_0$ durch $h(x,n) := h(x)$ eine $\tilde{Q}$-harmonische Funktion definiert, denn es gilt:

$$\tilde{Q}h(x,n) = \int_{E \times \mathbb{N}_0} h(y,m)\, \tilde{Q}[(x,n),d(y,m)]$$

$$= \int_E h(y,n+1)\, Q(x,dy) = Qh(x) = h(x) = h(x,n).$$

1.7 Invariante Maße und Dualität

1.) Sei Q ein Π-Kern auf $(E, \mathcal{E})$. Ein σ-endliches Maß ι auf $\mathcal{E}$ heißt Q-invariant, falls $\iota Q = \iota$ gilt.

2.) Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ der kanonische Meßraum aus 1.3.1. Ein Maß P auf $\mathcal{F}$ heißt Shift-invariant, falls $\theta_1(P) = P$ ist. Für $A_i \in \mathcal{E}$ $i=0,..,n$; $n \in \mathbb{N}_0$ und $l \in \mathbb{N}_0$ gilt dann:

$$P[X_l \in A_i, i=0,..,n] = P[X_{i+1} \in A_i, i=0,..,n].$$

3.) Für das Startmaß ϱ und den Π-Kern Q sei P_ϱ das Maß auf $\mathcal{F}$, für das $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ kanonische Markoffkette ist. Dann gilt: P_ϱ ist genau dann Shift-invariant, wenn ϱ Q-invariant ist.

4.) Sei υ ein σ-endliches Maß auf $\mathcal{E}$. Dann heißen zwei Übergangskerne Q und $\hat{Q}$ auf $(E, \mathcal{E})$ in Dualität zueinander bezgl. υ, falls für $f,g \in \underline{\mathcal{E}}_+$ gilt:

$$\int Qf\, g\, d\upsilon = \int f\, \hat{Q}g\, d\upsilon .$$

Ist Q Markoffscher Kern, so ist υ $\hat{Q}$-invariant. Zwei Markoffketten stehen in Dualität zueinander, falls ihre Π-Kerne in Dualität stehen. Die eine der beiden Ketten heißt dann auch die duale Kette der anderen.

1.8 Martinrand

1.) Zum Schluß des ersten Kapitels werden wir kurz die Konstruktion des Martinrandes beschreiben. Dazu seien folgende fünf Voraussetzungen erfüllt (REVUZ [20], VII.2 oder SIEGEL[23], 1.1):

a) $(E,\mathcal{O})$ ist ein topologischer Raum, welcher lokalkompakt ist und eine abzählbare Basis besitzt (LKAB). δ sei die Einschränkung der Metrik der Einpunkt-Kompaktifizierung auf E. $\mathcal{E} := \alpha(\mathcal{O})$ sei die σ-Algebra der Borelmengen.

b) Die Übergangskerne Q und $\hat{Q}$ auf $(E,\mathcal{E})$ stehen bezgl. eines Borelmaßes υ in Dualität.

c) $Q(C_k(E)) \subset C(E)$

$\hat{Q}(C_k(E)) \subset C(E)$

d) Für die Potentialkerne $V := \sum_{n \geq 0} Q^n$ und $\hat{V} := \sum_{n \geq 0} \hat{Q}^n$

von Q bzw. $\hat{Q}$ gilt:
$V(C_k(E)) \subset C(E)$ und

$\hat{V}(C_k(E)) \subset C(E)$.

e) Q ist Markoffscher Kern, und $\hat{Q}1$ ist stetig.

In REVUZ [20], VII.2 wird statt c) gefordert, daß mit $f \in C_k(E)$ Qf und $\hat{Q}f$ im Unendlichen verschwinden.

Benötigt wird allerdings nur die schwächere Bedingung c). Voraussetzung d) ist im wesentlichen eine Transienzbedingung.
Für einen LKAB-Raum $(E,\mathcal{O})$ bedeuten die Voraussetzungen c) und e) für den Ü-Kern $\hat{Q}$ und den Markoffschen Kern Q genau die Feller-Eigenschaft, d.h.
$Q(C(E)) \subset C(E)$ und
$\hat{Q}(C(E)) \subset C(E)$.

2.) Eine Funktion $r \in \underline{\mathcal{E}}_+$ heißt Bezugsfunktion, falls gilt:

a) r ist υ-integrierbar,
b) $\hat{V}r \in C(E)$, und
c) $\hat{V}r > 0$ (d.h. $\hat{V}r(x) > 0$ für alle $x \in E$).
Es existieren stets Bezugsfunktionen.

Für $x \in E$ und $A \in \mathcal{E}$ wird durch $\hat{K}(x,A) := \frac{\hat{V}(x,A)}{\hat{V}r(x)}$, eine Gewichtung des Potentialkerns $\hat{V}$, ein Kern auf $(E,\mathcal{E})$ definiert.

Für $x,y \in E$ sei $d(x,y) := \sum_{n \geq 1} c_n \, |\hat{K}f_n(x) - \hat{K}f_n(y)|$, wobei $\{c_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ und $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset C_k(E)$ so gewählt werden, daß $\sum_{n \geq 1} c_n \, \|\hat{K}f_n\|_\infty < \infty$ gilt und $\{\hat{K}f_n\}_{n \geq 1}$ (bezgl. gleichmäßiger Konvergenz) dicht in $\{\hat{K}f \mid f \in C_k(E)\}$ liegt. d ist Pseudometrik auf E.
E^* sei die Cauchy-Vervollständigung des metrischen Raumes $(E, d+\vartheta)$. $M := E^* \setminus E$ (man identifiziere die Elemente von E mit den Äquivalenzklassen konstanter Folgen) heißt Martinrand für die mit dem Maß $r\upsilon$ gestartete Kette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Die Metrik auf E werde wieder mit $d+\vartheta$ bezeichnet.

3.) Eigenschaften von E^*

$(E^*, d+\vartheta)$ ist kompakt. E ist eine in E^* dicht liegende, offene Teilmenge von E. Für die σ-Algebra $\mathcal{E}^*$ der Borelmengen in E^* gilt $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$. Für jedes $f \in C_k(E)$ kann $\hat{K}f$ gleichmäßig stetig auf $(E^*, d+\vartheta)$ fortgesetzt werden (die Fortsetzung heiße ebenfalls $\hat{K}f$).
Für $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ und $x \in M$ gilt dann:
Aus $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$ (bezgl. $d+\vartheta$) folgt $\hat{K}f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \hat{K}f(x)$ für alle $f \in C_k(E)$.

4.) $\Lambda := \{\omega \in \Omega \mid \lim_n X_n(\omega) \text{ existiert in } E^*\}$, x sei beliebiger Punkt in M. $X_\infty : \Omega \to E^*$ werde definiert durch

$$X_\infty(\omega) := \begin{cases} \lim_n X_n(\omega) & \text{für } \omega \in \Lambda \\ x & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist X_∞ $\mathcal{F}$-$\mathcal{E}^*$-meßbar.

5.) Sei h eine harmonische Funktion mit $\langle h, r\upsilon \rangle \leq 1$ und sei h lokal integrierbar (d.h. $\langle h \cdot 1_K, \upsilon \rangle < \infty$ für jedes kompakte K). Dann gilt:

a) $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{} X_\infty \; [P^h_{h\upsilon}]$ (d.h. $P^h_{h\upsilon}(\complement \Lambda) = 0$) und $[P^h_{hr\upsilon}]$.

b) Durch $\sigma^h := X_\infty(P^h_{hr\upsilon})$ wird ein Maß auf $\mathfrak{M} := M \cap \mathcal{E}^* = \{A \in \mathcal{E}^* | A \subset M\}$ definiert mit $\sigma^h(M) = \langle h, r\upsilon\rangle$.

c) $h\upsilon = \sigma^h \hat{K}$.

d) Gilt für ein $x \in \{h > 0\}$ $P^h_x \ll P^h_{h\upsilon}$ auf $\mathfrak{J}$, dann gilt die Konvergenz in a) P^h_x-f.s. .

e) Ist h' ebenfalls eine harmonische, lokal integrierbare Funktion mit $\langle h', r\upsilon\rangle \leq 1$, so folgt aus $\sigma^h = \sigma^{h'}$ $h = h'[\upsilon]$.

6.) Für eine lokal integrierbare, extremale Funktion h mit $\langle h, r\upsilon\rangle = 1$ gilt (SIEGEL[23] , Satz 6.5):

a) Es existiert ein $c \in M$, so daß $P^h_x[X_\infty = c] = 1$ für alle $x \in \{h > 0\}$ ist.

b) $\sigma^h = \varepsilon_c$.

1.9 Martinrand für diskrete Ketten

1.) Im diskreten Fall (E ist abzählbar und $\mathcal{O} = \mathcal{E} = \mathfrak{P}(E)$) mit dem Zählmaß $\upsilon = \sum_{x \in E} \varepsilon_x$ sind die Voraussetzungen von 1.8.1 erfüllt, wenn gilt:

i) Q ist Markoffsch, also $\sum_{y \in E} Q(x,y) = 1$ für alle $x \in E$.

ii) $\hat{Q}(x,y) := Q(y,x)$ mit $\sum_{y \in E} \hat{Q}(x,y) \leq 1$ für alle $x \in E$.

iii) $V(x,x) = \sum_{n \geq 0} Q^n(x,x) < \infty$ für alle $x \in E$, d.h. alle Zustände sind transient.

2.) Dann besitzt jede harmonische Funktion h mit $\langle h, r\upsilon\rangle \leq 1$ eine Integraldarstellung

$h(x) = \int_M \hat{K}(t,x)\, \sigma^h(dt)$ für alle $x \in E$, denn wegen 1.8.5 c) gilt: $h(x) = h\upsilon(\{x\}) = \sigma^h \hat{K}(\{x\}) = \int_M \hat{K}(t,x)\, \sigma^h(dt)$.

Die Menge $M_e := \{ t \in M \mid \hat{K}(t,.)$ extremal $\}$ ist eine Borelmenge in M mit $\sigma^h(M \setminus M_e) = 0$ für alle harmonischen Funktionen h mit $\langle h, r\upsilon \rangle \leq 1$.
Die Darstellung über die extremalen Funktionen $h(x) = \int_{M_e} \hat{K}(t,x)\, \sigma^h(dt)$ $(x \in E)$ ist dann eindeutig, d.h. auf M_e ist das Darstellungsmaß σ^h für h eindeutig bestimmt.

1.10 Martinrand für Raum-Zeit-Ketten

1.) Stehen die Übergangskerne Q_1 und Q_2 in Dualität bezgl. eines Maßes υ auf $\mathcal{E}$, so steht der Raum-Zeit-Übergangskern $\tilde{Q}_1$ bezgl. des Maßes $\tilde{\upsilon} := \upsilon \otimes (\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \varepsilon_n)$ in Dualität mit dem Kern $\tilde{U}$, wobei $\tilde{U}$ wie folgt definiert ist:
$\tilde{U}[(x,n),(A,n-1)] := Q_2(x,A)$ für $n \in \mathbb{N}$ und
$\tilde{U}[(x,0), .] := 0$ $(x \in E$ und $A \in \mathcal{E})$.

2.) Da die Raum-Zeit-Kette $\tilde{X}_n = (X_n, n)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ bei Start in einem beliebigen Punkt jede kompakte Menge mit Wahrscheinlichkeit 1 nur endlich oft trifft, ist die Transienzbedingung, die in d) aus 1.8.1 enthalten ist, stets erfüllt, d.h. für $f \in C_k(E \times \mathbb{N}_0)$ gilt:
$\tilde{V}f$ ist beschränkt, wobei $\tilde{V}$ der Potentialkern der Raum-Zeit-Kette ist.
Dasselbe gilt für die duale Kette.

II. IRRFAHRTEN

2.1 Topologische Gruppen und Halbgruppen

Wir betrachten jetzt Halbgruppen (die Verknüpfung ist assoziativ) mit Einselement e und Gruppen $(G,\cdot)$. Stets sei G abelsch. $(G,\mathcal{O})$ sei ein topologischer Raum, welcher lokalkompakt ist und eine abzählbare Basis besitzt (LKAB). $\mathcal{G} := \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ sei die σ-Algebra der Borelmengen in G.
Die Gruppe G heißt topologische Gruppe, wenn die Gruppenstruktur mit der Topologie "verträglich" ist, d.h. wenn die Abbildung $(x,y) \longrightarrow x \cdot y^{-1}$ des mit der Produkttopologie versehenen Raumes $G \times G$ in G stetig ist (y^{-1} sei das Inverse zu y).
Die Halbgruppe G heißt topologische Halbgruppe, wenn die Abbildung $(x,y) \longrightarrow x \cdot y$ stetig ist.

Eine abzählbare (Halb-)Gruppe G (mit Einselement) mit $\mathcal{O} = \mathcal{G} = \mathfrak{P}(G)$ ist eine topologische (Halb-)Gruppe. Sie wird diskrete (Halb-)Gruppe genannt.

Ab jetzt verstehen wir unter einer (Halb-)Gruppe stets eine abelsche, topologische (Halb-)Gruppe (mit Einselement), die lokalkompakt ist und eine abzählbare Basis besitzt. Im folgenden betrachten wir auf der (Halb-)Gruppe G Markoffketten, die mit der (Halb-)Gruppenstruktur verträglich sind. Dazu führen wir die Faltung von Maßen ein.

2.2 Faltung von Maßen

Für Maße μ und υ auf der σ-Algebra $\mathcal{G}$ der Borelmengen der Halbgruppe G wird durch $\mu * \upsilon(A) := \int\int 1_A(x \cdot y)\, \mu(dx)\, \upsilon(dy)$ für $A \in \mathcal{G}$ ein Maß auf $\mathcal{G}$ definiert. $\mu * \upsilon$ heißt Faltung von μ und υ. Die Faltungsoperation ist assoziativ und kommutativ, und für jedes Maß μ auf $\mathcal{G}$ ist $\mu * \varepsilon_e = \mu$. Für $n \in \mathbb{N}$ werde mit μ^n die n-fache Faltung von μ mit sich selbst bezeichnet. Sind μ und υ W-Maße, so ist auch $\mu * \upsilon$ W-Maß, da $\mu * \upsilon(G) = \mu(G) \cdot \upsilon(G) = 1$ ist.

2.3 Irrfahrten

Sei μ ein W-Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{G}$ der Borelmengen der Halbgruppe G. Eine Markoffkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Zustandsraum $(G,\mathcal{G})$ und Übergangskern $Q(x,.) = \varepsilon_x * \mu$ $(x\in G)$ heißt Irrfahrt auf G mit Verteilung μ. Ein so definierter Kern auf $(G,\mathcal{G})$ heißt Faltungskern. Wegen $Q(e,.)=\mu$ ist μ die Verteilung der Kette nach einem Schritt bei Start in e, also $X_1(P_e)=\mu$.

2.4 Darstellung von Irrfahrten

Man kann Irrfahrten auf der Halbgruppe G stets als Summen unabhängig, identisch verteilter Zufallsvariablen auf dem Produktraum $(G^{\mathbb{N}_0}, \mathcal{G}^{\mathbb{N}_0}, W_x)$ mit $W_x := \varepsilon_x \otimes \left(\bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mu\right)$ für $x\in G$ darstellen.

Dazu sei für $i\in\mathbb{N}_0$ Z_i die i-te Projektion und $\Sigma:(G^{\mathbb{N}_0}, \mathcal{G}^{\mathbb{N}_0}) \longrightarrow (\Omega,\mathfrak{F})$ die Abbildung in den kanonischen Meßraum mit $\Sigma(z_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $x_n := \sum_{i=0}^{n} z_i$.

Dann ist nämlich für alle $x\in G$ und $n\in\mathbb{N}_0$ $\Sigma(W_x)=P_x$ und $\sum_{i=0}^{n} Z_i(W_x)=X_n(P_x)$.

Beweis:

Für $x\in G$, $n\in\mathbb{N}_0$ und $g\in\mathcal{G}_+^{n+1}$ ist

$$\int g(X_0,..,X_n)\, d\Sigma(W_x) = \int g(x_0,..,\sum_{i=0}^{n} x_i)\, W_x(d(x_i)_{i\in\mathbb{N}_0})$$

$$= \int g(x_0,..,\sum_{i=0}^{n} x_i)\, \varepsilon_x \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{n} \mu\right) d(x_0,..,x_n)$$

$$= \int g(x_0,..,x_n)\, \varepsilon_x(dx_0) Q(x_0,dx_1)..Q(x_{n-1},dx_n)$$

$$= \int g(X_0,..,X_n)\, dP_x \text{ , und für } A\in\mathcal{G} \text{ ist}$$

$$P_x(X_n\in A) = \Sigma(W_x)(X_n\in A) = W_x(\sum_{i=0}^{n} Z_i \in A). \quad \square$$

2.5 Lemma

Für Irrfahrten $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf der Halbgruppe G mit Verteilung μ gilt:

1) Für $x\in G$ und $n\in\mathbb{N}$ ist $Q^n(x,.) = \varepsilon_x * \mu^n$.

2) Für ein Maß ς auf $\mathcal{G}$ ist $\varsigma Q = \mu * \varsigma$.
Für eine Funktion $f \in \mathcal{G}_+$ ist $Qf(x) = \int f(x\circ y)\,\mu(dy)\ (x\in G)$.

Beweis:

zu 1): Nach Definition stimmt die Behauptung für n=1. Sei sie jetzt für ein $n\in\mathbb{N}$ richtig. Dann ist für $x\in G$ und $A\in\mathcal{G}$

$Q^{n+1}(x,A) = \int Q^n(y,A)Q(x,dy) = \int \varepsilon_y * \mu^n(A)\ \varepsilon_x * \mu(dy)$

$= \int \varepsilon_{y\circ x} * \mu^n(A)\ \mu(dy) = \iint 1_A(y\circ x\circ z)\,\mu^n(dz)\,\mu(dy)$

$= (\varepsilon_x * \mu^n * \mu)(A) = \varepsilon_x * \mu^{n+1}(A)$.

zu 2): Für $A\in\mathcal{G}$ ist

$\varsigma Q(A) = \int Q(x,A)\,\varsigma(dx) = \int \varepsilon_x * \mu(A)\,\varsigma(dx)$

$= \iint 1_A(x\circ y)\,\mu(dy)\,\varsigma(dx) = \mu * \varsigma\ (A)$, und für $f\in\mathcal{G}_+$ ist

$Qf(x) = \int f(y)Q(x,dy) = \int f(y)\ \varepsilon_x * \mu(dy) = \int f(x\circ y)\,\mu(dy)$. ⌟

2.6 μ-harmonische Funktionen

Eine Q-harmonische Funktion heißt auch μ-harmonisch. Wegen 2.5.2 ist dies genau dann der Fall, wenn für alle $x\in G$ $h(x) = \int h(x\circ y)\,\mu(dy)$ gilt.

2.7 Lemma

Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Irrfahrt auf der Halbgruppe G mit Verteilung μ, dann ist auch die zugehörige Raum-Zeit-Kette Irrfahrt auf der Halbgruppe $G\times\mathbb{N}_0$ mit σ-Algebra $\mathcal{G}\otimes\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$ und Verteilung $\tilde{\mu} := \mu\otimes\varepsilon_1$.

Eine positive, reelle, meßbare Funktion h auf $G\times\mathbb{N}_0$ ist genau dann harmonisch für die Raum-Zeit-Kette, wenn für alle $(x,n)\in G\times\mathbb{N}_0$ gilt:

$h(x,n) = \int h(x\circ y, n+1)\,\mu(dy)$.

Beweis:
Die Verknüpfung auf $G \times \mathbb{N}_0$ werde mit $\oplus$ bezeichnet.
Dann ist für $x \in G$, $A \in \mathfrak{B}$ und $n,m \in \mathbb{N}_0$:

$$\varepsilon_{(x,n)} * \tilde{\mu}(A \times \{m\}) = \int_{G \times \mathbb{N}_0} 1_{A \times \{m\}}[(x,n) \oplus (y,k)] \, d\tilde{\mu}(y,k)$$

$$= \int_G 1_{A \times \{m\}}(x \cdot y, n+1) \, \mu(dy) = \int_G 1_A(x \cdot y) \, \mu(dy) = Q(x,A),$$

falls $m = n+1$ (und 0 sonst). Also gilt insgesamt
$\varepsilon_{(x,n)} * \tilde{\mu} = \tilde{Q}[(x,n),.\,]$, d.h. $\tilde{Q}$ ist ebenfalls Faltungskern.
Wegen $\tilde{Q}h(x,n) = \int_{G \times \mathbb{N}_0} h[(x,n) \oplus (y,k)] \, d\tilde{\mu}(y,k)$

$$= \int_G h(x \cdot y, n+1) \, \mu(dy)$$ folgt auch sofort

der zweite Teil der Behauptung. ⌟

2.8 Exponentiale

Eine reelle Funktion $h \in \mathfrak{C}_+$ mit $h \neq 0$ heißt Exponential der Halbgruppe $(G,\cdot)$, falls $h(x \cdot y) = h(x) \cdot h(y)$ für alle $x,y \in G$ ist. Exponentiale sind also die nicht verschwindenden Homomorphismen von $(G,\cdot)$ in $(\mathbb{R}_+,.)$.
Stets ist $h(e)=1$, denn es ist $h(e)=h(e \cdot e) = h(e)^2$, also $h(e) \in \{0,1\}$. Wegen $h(x)=h(x) \cdot h(e)$ für alle $x \in G$ folgt $h(e)=1$.
$\hat{G}$ sei die Menge der Exponentiale von $(G,\cdot)$.
Für Exponentiale auf Gruppen gelten noch folgende wichtige Eigenschaften:

a) Exponentiale sind stetig (HEWITT und ROSS[13], 22.19).
b) Exponentiale sind strikt positiv (d.h. für ein Exponential h gilt: $h(x) > 0$ für alle $x \in G$).

2.9 Lemma

Seien $(G_1,\cdot)$ und $(G_2,+)$ Halbgruppen. Dann sind die Exponentiale h des Produktraumes $G_1 \times G_2$ genau von der Form $(x,y) \longrightarrow h_1(x) \cdot h_2(y)$, wobei für $i=1,2$ $h_i \in \hat{G}_i$ ist.

Beweis:
Die Verknüpfung auf $G_1 \times G_2$ werde mit $\oplus$ bezeichnet. e_1 bzw. e_2 seien die Einselemente von G_1 bzw. G_2. Sei jetzt h Exponential von $G_1 \times G_2$. Definiert man für $x_1 \in G_1$ $h_1(x_1) := h(x_1, e_2)$ und für $y_2 \in G_2$ $h_2(y_2) := h(e_1, y_2)$, dann ist

$h_1(x_1) \cdot h_2(y_2) = h(x_1, e_2) \cdot h(e_1, y_2) = h(x_1, y_2)$ und $h_1 \in \widehat{G}_1$, da für $x_1, z_1 \in G_1$ $h_1(x_1 \circ z_1) = h(x_1 \circ z_1, e_2) = h(x_1 \circ z_1, e_2 + e_2)$ $= h(x_1, e_2) \cdot h(z_1, e_2) = h_1(x_1) \cdot h_1(z_1)$ ist. Analog ist $h_2 \in \widehat{G}_2$.

Sind umgekehrt für $i=1,2$ $h_i \in \widehat{G}_i$, so wird durch $h(x,y) := h_1(x) \cdot h_2(y)$ ein Exponential auf $(G_1 \times G_2, \oplus)$ definiert, denn für $x_1, y_1 \in G_1$ und $x_2, y_2 \in G_2$ gilt:

$h[(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2)] = h(x_1 \circ y_1, x_2 + y_2) = h_1(x_1 \circ y_1) \cdot h_2(x_2 + y_2)$ $= h_1(x_1) \cdot h_1(y_1) \cdot h_2(x_2) \cdot h_2(y_2) = h(x_1, x_2) \cdot h(y_1, y_2)$. ⌟

2.10 Definition (LAURITZEN [17], Def. 2.2)
Eine meßbare Teilmenge $S \neq \emptyset$ der Halbgruppe $(G, \circ)$ heißt Seite von G, falls folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

a) S ist Unter-Halbgruppe von G (d.h. mit $a, b \in S$ ist auch $a \circ b \in S$, und S enthält das Einselement e).
b) Ist ein Element $c \in S$ von der Form $c = a \circ b$ mit $a, b \in G$, so sind bereits $a, b \in S$.

2.11 Lemma
S ist genau dann Seite von G, wenn eine Funktion $h \in \widehat{G}$ existiert mit $S = \{h > 0\}$.

Beweis:
Sei S Seite. Definiert man $h := 1_S$, dann ist $S = \{h > 0\}$ und h Exponential, da für $a, b \in G$ genau dann $a \circ b \in S$ ist, wenn $a \in S$ und $b \in S$ ist. Also ist $h(a \circ b) = 1$ genau dann, wenn $h(a) = h(b) = 1$ ist.

Umgekehrt ist für $h \in \hat{G}$ $S:=\{h > 0\}$ Seite, denn für $a,b \in G$ ist $h(a \cdot b) > 0$ genau dann, wenn $h(a) \cdot h(b) > 0$, also $a \cdot b \in S$ genau dann, wenn $a \in S$ und $b \in S$ ist. ⌟

2.12 Beispiele

1.) Exponentiale von $(\mathbb{Z},+)$ und $(\mathbb{R},+)$ sind genau die Funktionen h_a mit $h_a(x):=a^x$ für $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.

2.) Exponentiale von $(\mathbb{N}_0,+)$ sind genau die Funktionen h_a mit $h_a(x):=a^x$ für $a \in \mathbb{R}_+$ $(h_0(x)=0^x=1_{\{0\}}(x))$.

3.) Exponentiale von $(\mathbb{Z}^d,+)$ und $(\mathbb{R}^d,+)$ $(d \in \mathbb{N})$ sind genau die Funktionen h_a mit $h_a(x_1,..,x_d):=\prod_{i=1}^{d} a_i^{x_i}$ mit $a=(a_1,..,a_d) \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Beweis:

zu 1.): Sei h Exponential auf $(\mathbb{Z},+)$. Für $a:=h(1)$ gilt dann $a > 0$, da $(\mathbb{Z},+)$ Gruppe ist. Dann ist $h(n)=a^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, und wegen $h(n-n)=h(0)=1$ ist auch $h(-n)=a^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, also insgesamt $h(z)=a^z$ für alle $z \in \mathbb{Z}$. Sei h Exponential auf $(\mathbb{R},+)$. Dann gilt wie oben $h(z)=a^z$ für alle $z \in \mathbb{Z}$ mit $a > 0$. Für $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist $[h(\frac{m}{n})]^n = h(\frac{m}{n} \cdot n) = h(m)=a^m$, also $h(\frac{m}{n}) = a^{\frac{m}{n}}$, d.h. $h(x)=a^x$ für alle $x \in \mathbb{Q}$ und damit auf ganz $\mathbb{R}$ wegen der Stetigkeit des Exponentials auf der Gruppe $(\mathbb{R},+)$.

zu 2.): Sei h Exponential auf $(\mathbb{N}_0,+)$. Ist $a:=h(1) > 0$, dann ist $\{h > 0\} = \mathbb{N}_0$ und $h(n)=a^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Ist aber $h(1)=0$, dann auch $h(n)=0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $h = 1_{\{0\}}$.

zu 3.): Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus 2.9.
Umgekehrt sind alle angegebenen Funktionen Exponentiale. ⌟

2.13 Lemma

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Irrfahrt auf der Halbgruppe $(G,\cdot)$ mit Verteilung μ. Dann gilt:

1.) Ein Exponential h von G ist genau dann μ-harmonisch, wenn $\langle h,\mu\rangle = 1$ ist.

2.) Ein Exponential von $G\times\mathbb{N}_0$ ist genau dann Raum-Zeit-harmonisch, wenn es von der Gestalt $(x,n) \longrightarrow h(x)\cdot\langle h,\mu\rangle^{-n}$ $(x\in G$ und $n\in\mathbb{N}_0)$ ist, wobei $h\in\hat{G}$ ist mit $0<\langle h,\mu\rangle<\infty$.

Beweis:

zu 1.): Für ein Exponential h ist $\int h(x\cdot y)\,\mu(dy)$ $=h(x)\cdot\langle h,\mu\rangle$, also ist h μ-harmonisch genau dann, wenn $\langle h,\mu\rangle = 1$ ist.

zu 2.): Die angegebene Funktion ist R-Z-harmonisch, denn es gilt: $\int h(x\cdot y)\langle h,\mu\rangle^{-(n+1)}\,\mu(dy)$ $=h(x)\cdot\langle h,\mu\rangle^{-(n+1)}\int h\,d\mu = h(x)\cdot\langle h,\mu\rangle^{-n}$.

Umgekehrt sind Exponentiale auf dem Produktraum $G\times\mathbb{N}_0$ nach 2.9 und 2.12.2 von der Form $(x,n) \longrightarrow h(x)\cdot a^n$ $(x\in G$ und $n\in\mathbb{N}_0)$ mit $h\in\hat{G}$ und $a\in\mathbb{R}_+$. Diese Funktion ist genau dann R-Z-harmonisch, wenn $h(x)\cdot a^n$ $= \int h(x\cdot y)\cdot a^{n+1}\,\mu(dy)$ und damit $a\cdot\langle h,\mu\rangle = 1$ gilt. Also ist $a=\langle h,\mu\rangle^{-1}$ und die Funktion von der behaupteten Gestalt. □

2.14 Beispiel

1.) Sei $(G,\leq)$ ein Halb-Verband, d.h. $\leq$ ist Ordnungsrelation und zu je zwei Elementen a und b in G existiert das Supremum $a\vee b$. Es ist $a\vee b=b$ genau dann, wenn $a\leq b$ ist. Jedes Element a in G ist idempotent, d.h. für alle $a\in G$ ist $a\vee a=a$. G besitze eine untere Schranke e. Dann ist $(G,\vee)$ abelsche Halbgruppe (mit Einselement e). Für $a,b\in G$ sei das "abgeschlossene Intervall" $[a,b] := \{x\in G \mid a\leq x \wedge x\leq b\}$.

Sei weiterhin $\mathcal{O}$ eine Topologie auf G, so daß G topologische Halbgruppe ist und die σ-Algebra $\mathcal{B} := \mathcal{A}(\mathcal{O})$ für $a,b\in G$ die Intervalle $[a,b]$ enthalte.

2.) Definiert man für W-Maße μ auf $\mathfrak{G}$ die "Verteilungsfunktion" F_μ für $x \in G$ durch $F_\mu(x) := \mu[e,x]$, so ist für die W-Maße μ und υ auf $\mathfrak{G}$ $F_{\mu * \upsilon} = F_\mu \cdot F_\upsilon$, denn für $x \in G$ ist:

$F_{\mu * \upsilon}(x) = \mu * \upsilon\,[e,x] = \int\int 1_{[e,x]}(y \circ z)\, \mu(dy)\, \upsilon(dz)$

$= \int\int 1_{[e,x]}(y) \cdot 1_{[e,x]}(z)\, \mu(dy)\, \upsilon(dz) = \mu[e,x] \cdot \upsilon[e,x]$

$= F_\mu(x) \cdot F_\upsilon(x)$.

3.) Sei jetzt $(G, \leq)$ sogar totalgeordnet, d.h. je zwei Elemente seien vergleichbar. Dann gilt für den Ü-Kern Q einer Irrfahrt mit Verteilung μ auf $(G, \vee)$ und für $x,y,z \in G$:

$Q(x,[y,z]) = \varepsilon_x * \mu[y,z] = \int 1_{[y,z]}(x \circ w)\, \mu(dw)$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für } x > z, \\ \mu[y,z] & \text{für } x < y \text{ und} \\ \mu[e,z] & \text{für } x \in [y,z]. \end{cases}$$

Speziell ist also für $y=z$

$$Q(x,\{y\}) = \begin{cases} 0 & \text{für } x > y, \\ \mu(y) & \text{für } x < y \text{ und} \\ \mu[e,y] & \text{für } x = y. \end{cases}$$

4.) Spezialfälle

a) $\mathbb{R}_+$ mit der üblichen Ordnungsrelation $\leq$, der üblichen Topologie und dem Einselement $e=0$. Exponentiale von $(\mathbb{R}_+, \vee)$ sind genau die Funktionen $1_{[0,x]}$, $1_{[0,x)}$ mit $x > 0$, sowie $1_{\{0\}}$ und $1_{\mathbb{R}_+}$, denn:

Die Intervalle $[0,x]$, $[0,x)$ mit $x > 0$, sowie $\{0\}$ und $\mathbb{R}_+$ sind Seiten. Ist umgekehrt S eine Seite mit $x \in S$, dann enthält S alle $y \in \mathbb{R}_+$ mit $y \leq x$, da für diese $x \vee y = x$ gilt. Also sind Seiten von der angegebenen Form.

Außerdem gilt für ein Exponential h von $(\mathbb{R}_+, \vee)$ $h(x) = h(x \circ x) = h(x) \cdot h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$. Also nimmt das Exponential nur die Werte 0 oder 1 an. Damit ist aber bereits alles gezeigt.

b) Das kompakte Intervall $[0,a]$ für $a>0$ mit der üblichen Ordnungsrelation $\leq$, der üblichen Topologie und dem Einselement $e=0$. Exponentiale von $([0,a],\vee)$ sind genau die Funktionen $1_{[0,x]}$ mit $x\in[0,a]$ und $1_{[0,x)}$ mit $x\in(0,a]$, wie man analog wie oben sieht.

c) Ein Anfang der natürlichen Zahlen $\{1,..,m_o\}$ für $m_o\in\mathbb{N}$ mit der üblichen Ordnungsrelation und der diskreten Topologie, sowie dem Einselement $e=1$. Exponentiale von $(\{1,..,m_o\},\vee)$ sind genau die Funktionen $1_{\{1,..,m\}}$ mit $m\in\{1,..,m_o\}$.

Im letzten Teil des Kapitels gehen wir näher auf topologische Gruppen ein. Hier ist von besonderer Bedeutung die Existenz eines translationsinvarianten Maßes, des sogenannten Haarmaßes. Sei G für den Rest dieses Kapitels stets Gruppe.

2.15 Haarmaß

1.) Ein Borelmaß τ auf $\mathfrak{G}$ mit $\tau(G)>0$ heißt Haarmaß, falls $\varepsilon_x * \tau = \tau$ für alle $x\in G$ gilt. Bis auf konstante Vielfache existiert eindeutig ein Haarmaß auf $\mathfrak{G}$. Einen Beweis findet man etwa bei LOOMIS [18], §24.

2.) Beispiele

a) Ist G diskrete Gruppe, dann ist das Zählmaß $\tau := \sum_{y\in G} \varepsilon_y$ Haarmaß, denn für $x\in G$ ist:

$$\varepsilon_x * \tau = \sum_{y\in G} \varepsilon_x * \varepsilon_y = \sum_{y\in G} \varepsilon_{x\circ y} = \sum_{y\in G} \varepsilon_y = \tau .$$

b) Für $(G,\circ)=(\mathbb{R}^d,+)$ mit $d\in\mathbb{N}$ ist das d-dimensionale Lebesgue-Borelmaß $\tau=\lambda^d$ Haarmaß auf der σ-Algebra der Borelmengen des $\mathbb{R}^d$. Dies wird z.B. bei BAUER[4], §7 und §8 bewiesen.

2.16 Faltung von Funktionen

1.) Für Funktionen $f,g \in \mathcal{K}_+$ ist die Faltung durch
$f * g(x) := \int f(y) \cdot g(y^{-1} \cdot x)\, \tau(dy)$ $(x \in G)$ definiert.
2.) Ist f zusätzlich τ-integrierbar und g beschränkt, so ist $f*g$ stetig. Ein Beweis findet sich bei RUDIN[22], 1.1.6 .

2.17 Spiegelung von Maßen

1.) Für die stetige Abbildung $S:G \to G$ mit $S(x):=x^{-1}$ für $x \in G$ (Spiegelung an der Einheit) sei $\hat{\mu} := S(\mu)$ die Spiegelung des Maßes μ .
2.) Die Faltungskerne Q zur Verteilung μ und $\hat{Q}$ zur Verteilung $\hat{\mu}$ stehen in Dualität bezüglich des Haarmaßes τ . Speziell ist τ Q-invariant und $\hat{Q}$-invariant, also
$\mu * \tau = \hat{\mu} * \tau = \tau$.

Beweis:
Für $f,g \in \mathcal{K}_+$ ist

$$\begin{aligned}
\int f\, \hat{Q}g\, d\tau &= \int f(x) \int g(y)\, \epsilon_x * \hat{\mu}(dy)\, \tau(dx) \\
&= \int\int f(x) g(x \cdot y)\, \hat{\mu}(dy)\, \tau(dx) \\
&= \int\int f(x) g(x \cdot y^{-1})\, \mu(dy)\, \tau(dx) \\
&= \int\int f(x) g(x \cdot y^{-1})\, \epsilon_y * \tau(dx)\, \mu(dy) \quad (\tau \text{ ist Haarmaß}) \\
&= \int\int f(x \cdot y) g(x)\, \tau(dx)\, \mu(dy) \\
&= \int Qf\, g\, d\tau .
\end{aligned}$$

Also stehen nach 1.7.4 Q und $\hat{Q}$ in Dualität bezgl. τ . Da Q und $\hat{Q}$ Markoffsch sind, folgt der zweite Teil der Behauptung aus 2.5.2 . ⌟

2.18 Martinrand für Raum-Zeit-Ketten

Für R-Z-Ketten zu Gruppen-Irrfahrten $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit Faltungskern Q zur Verteilung μ sind die Voraussetzungen 1.8 zur Konstruktion des Martinrandes erfüllt.

Beweis-Skizze (siehe auch AZENCOTT [2] oder SIEGEL [23], 4.1):
zu a): Die topologischen Voraussetzungen sind für den Produktraum ebenfalls erfüllt.
zu b): Q und $\hat{Q}$ (der Faltungskern zu $\hat{\mu}$) stehen nach 2.17.2 bezgl. des Haarmaßes τ in Dualität. Dann steht der R-Z-Übergangskern $\tilde{Q}$ (zu Q) mit dem in 1.10.1 definierten Kern $\tilde{U}$ in Dualität bezgl. des Maßes $\tilde{\tau} := \tau \otimes (\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \varepsilon_n)$.
zu c) und e): Nach 2.7 ist $\tilde{Q}$ Faltungskern zur Verteilung $\tilde{\mu} = \mu \otimes \varepsilon_1$ und damit Markoffsch. Für $(x,n) \in G \times \mathbb{N}$ und $A \in \mathfrak{G}$ gilt für den Kern $\tilde{U}$
$\tilde{U}[(x,n),(A,n-1)] = \hat{Q}(x,A) = \varepsilon_x * \hat{\mu}(A)$, d.h.
$\tilde{U}[(x,n),.] = \varepsilon_{(x,n)} * (\hat{\mu} \otimes \varepsilon_{-1})$ für alle $x \in G$ und $n \in \mathbb{N}$.
$\tilde{U}$ ist also bis auf sein Verhalten auf der Achse $n=0$ ebenfalls Faltungskern. Dort gilt $U[(x,0),.] = 0$ für alle $x \in G$, also

$$\tilde{U}1(x,n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ und} \\ 0 & \text{für } n=0 \quad \text{für alle } x \in G, \text{ d.h. e) ist erfüllt.} \end{cases}$$

Da im wesentlichen beide Kerne Faltungskerne sind, sind sie auch Fellerkerne, denn nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz werden stetige Funktionen durch Faltungskerne wieder in solche überführt. Damit ist aber auch c) erfüllt.
zu d): Sei $\tilde{V} = \sum_{n \geq 0} \tilde{Q}^n$ der Potentialkern für die Raum-Zeit-Kette. Dann ist nach 1.10.2 für $f \in C_k(G \times \mathbb{N}_0)$ $\tilde{V}f$ beschränkt. $\tilde{V}f$ ist ebenfalls stetig, da für Funktionen mit kompaktem Träger in $\sum_{n \geq 0} \tilde{Q}^n f$ nur endlich viele Summanden einen Beitrag liefern und $\tilde{Q}^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ Fellerkerne sind. Dasselbe Resultat erhält man für die duale Kette. ⌟

Wir wollen jetzt noch eine spezielle Klasse von Gruppen-Irrfahrten studieren:

2.19 Ausgebreitete Maße (AZENCOTT [3], I.8)

1.) Ein W-Maß μ auf $\mathfrak{G}$ heißt ausgebreitet ("spread out", "étalée"), falls ein $p \in \mathbb{N}$ existiert, so daß μ^p nicht singulär zum Haarmaß τ ist. Dann gibt es also eine Lebesgue-Zerlegung $\mu^p = g \cdot \tau + \varkappa$, wobei $g \in \mathfrak{L}_+$ mit $g \neq 0 \ [\tau]$ und $\varkappa$ ein Maß auf $\mathfrak{G}$ mit $\varkappa \perp \tau$ ist.
Eine Irrfahrt mit Verteilung μ heißt ausgebreitet, falls μ ausgebreitet ist.

2.) Eine Irrfahrt auf G mit Verteilung μ, für die $\mu \ll \tau$ (μ ist τ-stetig) gilt, ist stets ausgebreitet. Dann kann man nämlich p=1 und $\varkappa = 0$ wählen.

3.) Beispiele

a) Ist G diskrete Gruppe, dann ist jedes W-Maß τ-stetig.

b) Ist $(G,\circ) = (\mathbb{R}^d,+)$ mit der σ-Algebra der Borelmengen des $\mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$), dann ist jedes W-Maß $\mu = f \cdot \lambda^d$ mit Dichte f τ-stetig ($\tau = \lambda^d$).

c) Ist $(G,\circ) = (\mathbb{R},+)$ mit der σ-Algebra der Borelmengen von $\mathbb{R}$, dann ist das W-Maß $\mu := \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + 1_{[0,1]}\lambda)$ ausgebreitet, aber nicht τ-stetig.

d) Jede diskrete Verteilung auf $(\mathbb{R},+)$ mit der σ-Algebra der Borelmengen ist nicht ausgebreitet, aber es existieren andere singuläre Verteilungen bezgl. des Haarmaßes $\tau = \lambda$, die ausgebreitet sind (FELLER [10], V.4 Example (d)).

III. EXPONENTIALFAMILIEN

Wir untersuchen in diesem Kapitel Exponentialfamilien. Dabei leiten wir zunächst Eigenschaften von Exponentialfamilien her. Dann geben wir Bedingungen an, unter denen eine Familie von Verteilungen bereits eine Exponentialfamilie bildet. Sei $(G, \cdot)$ stets eine (Halb-)Gruppe im Sinne von 2.1 .

3.1 Definition

Für eine Parametermenge Θ sei $(\mu_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta}$ eine Familie von W-Maßen auf $\mathcal{G}$. Diese Familie heißt Exponentialfamilie (zu μ_{ϑ_0}), falls ein ausgezeichnetes $\vartheta_0 \in \Theta$ existiert, so daß jedes μ_ϑ eine Dichte bezgl. $\mu_{\vartheta_0} =: \mu$ besitzt, die von der Form $x \longrightarrow \xi_\vartheta(x)\cdot Z(\vartheta)$ ist, wobei ξ_ϑ ein Exponential auf G und $Z(\vartheta)$ eine Normierungskonstante ist.

Wir betrachten jetzt Irrfahrten $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf G mit Faltungskern Q_ϑ zur Verteilung μ_ϑ für $\vartheta\in\Theta$. Dazu wähle man etwa die kanonische Markoffkette (siehe 1.3) mit W-Maß $P_{\vartheta,x}$ auf dem Produktraum $(\Omega, \mathfrak{F})$.

3.2 Lemma

Bilden die $(\mu_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta}$ eine Exponentialfamilie gemäß 3.1 mit ausgezeichnetem $\vartheta_0\in\Theta$, so sind die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

(B1) Für jedes $n\in\mathbb{N}_0, x\in G$ und $\vartheta\in\Theta$ gilt $P_{\vartheta,x} \ll P_{\vartheta_0,x} =: P_x$ auf der σ-Algebra $\mathfrak{F}_n$ der Vergangenheit bis n. Es existieren also Dichten $L[(x,n),\vartheta] \in \mathfrak{F}_{n+}$, die $P_{\vartheta_0,x}$-f.s. bestimmt sind.

(B2) Für jedes $\vartheta \in \Theta$ existiert eine für die Raum-Zeit-Kette zur Irrfahrt mit Verteilung μ_{ϑ_0} harmonische Funktion $k[.,\vartheta]$ auf $G \times \mathbb{N}_0$ mit $k[(e,0),\vartheta] = 1$ und $L[(x,n),\vartheta] = k[(x,0),\vartheta]^{-1} \cdot k[(X_n,n),\vartheta]$ $[P_{\vartheta_0,x}]$ für alle $(x,n) \in G \times \mathbb{N}_0$ mit $k[(x,0),\vartheta] > 0$.

Für $\vartheta \in \Theta$ und $(x,n) \in G \times \mathbb{N}_0$ ist dann $k[(x,n),\vartheta] = \xi_\vartheta(x) \cdot Z(\vartheta)^n$.

Beweis:

zu (B1): Da $\mu_\vartheta \ll \mu_{\vartheta_0}$ für alle $\vartheta \in \Theta$ gilt, ist auch für jedes $x \in G$ und $n \in \mathbb{N}$

$$W_{\vartheta,x} := \varepsilon_x \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{n} \mu_\vartheta\right) \ll \varepsilon_x \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{n} \mu_{\vartheta_0}\right) =: W_x \text{ auf } \mathcal{G}^{n+1}.$$

Sei jetzt $F := [X_0 \in A_0, \ldots, X_n \in A_n] \in \mathfrak{F}_n$ mit $A_i \in \mathcal{G}$ für $i=0,\ldots,n$ und $P_x(F)=0$. Dann ist nach 2.4 auch $W_x(\Sigma^{-1}(F))=0$, also nach Voraussetzung $W_{\vartheta,x}(\Sigma^{-1}(F))=0$. Dies bedeutet bereits $P_{\vartheta,x}(F)=0$, also (B1).

Für $(x,n) \in G \times \mathbb{N}_0$ mit $\xi_\vartheta(x) > 0$ und $\vartheta \in \Theta$ können wir die Dichten explizit angeben:

$L[(x,n),\vartheta] = \xi_\vartheta(X_n) \cdot Z(\vartheta)^n / \xi_\vartheta(x)$ $[P_{\vartheta_0,x}]$, denn für $g \in \mathcal{G}_+^{n+1}$ gilt:

$$\langle g(X_0,\ldots,X_n), P_{\vartheta,x} \rangle$$

$$= \int g(x_0,\ldots,\sum_{i=0}^{n} x_i)\, \varepsilon_x \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{n} \mu_\vartheta\right) d(x_0,\ldots,x_n) \quad \text{(nach 2.4)}$$

$$= \int g(x_0,\ldots,\sum_{i=0}^{n} x_i) \prod_{i=1}^{n} \xi_\vartheta(x_i) \cdot Z(\vartheta)^n\, \varepsilon_x \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{n} \mu_{\vartheta_0}\right) d(x_0,\ldots x_n)$$

$$= \xi_\vartheta(x)^{-1} \int g(x_0,\ldots,\sum_{i=0}^{n} x_i)\, \xi_\vartheta\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) Z(\vartheta)^n\, \varepsilon_x \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{n} \mu_{\vartheta_0}\right) d(x_0,\ldots,x_n)$$

$$= \xi_\vartheta(x)^{-1} \langle g(X_0,\ldots,X_n)\, \xi_\vartheta(X_n) Z(\vartheta)^n, P_{\vartheta_0,x} \rangle$$

$$= \langle g(X_0,\ldots,X_n), L[(x,n),\vartheta] \cdot P_{\vartheta_0,x} \rangle .$$

zu (B2): Definiert man auf $G \times \mathbb{N}_0$ die Funktion $k[.,\vartheta]$ mit $k[(x,n),\vartheta] = \xi_\vartheta(x) \cdot Z(\vartheta)^n$, so ist wegen $k[(x,0),\vartheta] = \xi_\vartheta(x)$ nur noch die Harmonizität der Funktion $k[.,\vartheta]$ zu zeigen: Für $(x,n) \in G \times \mathbb{N}_0$ ist $\int k[(x \cdot y, n+1),\vartheta]\, \mu(dy) = \int \xi_\vartheta(x \cdot y) Z(\vartheta)^{n+1}\, \mu(dy) = \xi_\vartheta(x) Z(\vartheta)^n \langle \xi_\vartheta \cdot Z(\vartheta), \mu \rangle = k[(x,n),\vartheta]$, da $\langle \xi_\vartheta \cdot Z(\vartheta), \mu \rangle = \mu_\vartheta(G) = 1$ ist. Die Funktionen sind also nach 2.7 harmonisch für die R-Z-Kette zur Irrfahrt mit Verteilung μ_{ϑ_0}. ⌟

3.3 Bemerkung

1.) In 3.2 (B1) wurde gezeigt, daß aus $\mu_\vartheta \ll \mu_{\vartheta_0}$ für ein $\vartheta_0 \in \Theta$ bereits $P_{\vartheta,x} \ll P_{\vartheta_0,x}$ auf $\mathfrak{F}_n$ für $x \in G$ und $n \in \mathbb{N}_0$ folgt. Da umgekehrt mit $P_{\vartheta,x} \ll P_{\vartheta_0,x}$ auf $\mathfrak{F}_n$ für alle $x \in G$ speziell $P_{\vartheta,e} \ll P_{\vartheta_0,e}$ auf $\mathfrak{F}_1$ und damit $X_1(P_{\vartheta,e}) = \mu_\vartheta \ll X_1(P_{\vartheta_0,e}) = \mu_{\vartheta_0}$ auf $\mathfrak{C}$ ist, ist (B1) äquivalent zu (B1') mit:

(B1') Für jedes $\vartheta \in \Theta$ ist $\mu_\vartheta \ll \mu_{\vartheta_0}$ auf $\mathfrak{C}$.

2.) Unter der Gültigkeit von (B1) ist (B2) ohne die Forderung der Harmonizität von $k[.,\vartheta]$ äquivalent zu folgender Bedingung: Die σ-Algebra $\mathfrak{A}(X_n)$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ $\mathcal{P}_x := \{P_{\vartheta,x} \mid \vartheta \in \Theta\}$ erschöpfend auf $\mathfrak{F}_n$, falls $x \in G$ mit $k[(x,0),\vartheta] > 0$ ist. Dies gilt nach dem Satz von Halmos-Savage (siehe etwa HEYER[15], Satz 5.2), da jedes $P_{\vartheta,x} \in \mathcal{P}_x$ bereits eine $\mathfrak{A}(X_n)$-meßbare Dichte bezgl. $P_{\vartheta_0,x}$ auf $\mathfrak{F}_n$ besitzt. Nach 3.2 (B2) kann man etwa $k[(X_n,n),\vartheta]/k[(x,0),\vartheta]$ wählen.

3.4 Satz

1.) Es seien die Bedingungen (B1) und (B2) erfüllt, und für $\vartheta \in \Theta$, $x \in G$ mit $k[(x,0),\vartheta] > 0$ sei $P_x^{k[.,\vartheta]}$ nach 1.6.3 das Maß auf $(\Omega, \mathfrak{F})$, für das $\widetilde{X}_n = (X_n, n)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ $k[.,\vartheta]$-Kette zur Raum-Zeit-Kette zur Irrfahrt mit Verteilung μ_{ϑ_0} ist. Dann gilt $P_x^{k[.,\vartheta]} = P_{\vartheta,x}$.

2.) Ist zusätzlich zum Teil 1.) noch folgende Bedingung erfüllt:

(B3) Für jedes $\vartheta \in \Theta$ ist die Konstante 1 extremal für die R-Z-Kette zur Irrfahrt mit Verteilung μ_ϑ,

so gilt:

Die Funktionen $k[.,\vartheta]$ sind extremal.

Beweis:
zu 1.): Für $n \in \mathbb{N}_0$, $x \in G$ mit $k[(x,0),\vartheta] > 0$ und $F \in \mathcal{F}_n$ ist
$P_{\vartheta,x}(F) = \langle 1_F \cdot I[(x,n),\vartheta], P_{\vartheta_0,x} \rangle$ (nach (B1))
$= k[(X,0),\vartheta]^{-1} \langle 1_F \cdot k[(X_n,n),\vartheta], P_{\vartheta_0,x} \rangle$ (nach (B2))
$= P_x^{k[\cdot,\vartheta]}(F)$ nach 1.6.3 . Dies gilt auf jedem $\mathcal{F}_n$, also auch auf $\mathcal{F}$.
zu 2.) Die σ-Algebra $\mathcal{G}_\infty$ ist P_ϑ,.-f.s. trivial für jedes $\vartheta \in \Theta$ nach 1.6.8, und damit nach 3.4.1 $P_x^{k[\cdot,\vartheta]}$-f.s. trivial für alle $x \in G$ mit $k[(x,0),\vartheta] > 0$.
Also ist wegen 1.6.8 $k[\cdot,\vartheta]$ extremal. ⌟

3.5 Bemerkung
Nach Lemma 3.2 sind für eine Exponentialfamilie $(\mu_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta}$ (zu μ_{ϑ_0}), bei der jedes μ_ϑ bezgl. μ_{ϑ_0} eine Dichte der Form $x \longrightarrow \xi_\vartheta(x)\cdot Z(\vartheta)$ mit ξ_ϑ Exponential und $Z(\vartheta)$ Konstante besitzt, (B1) und (B2) erfüllt. Die Funktionen $k[\cdot,\vartheta]$ mit $k[(x,n),\vartheta] = \xi_\vartheta(x)\cdot Z(\vartheta)^n$ für $(x,n) \in G \times \mathbb{N}_0$ sind harmonisch für die R-Z-Kette zur Irrfahrt mit Verteilung μ_{ϑ_0}, und wegen $P_x^{k[\cdot,\vartheta]} = P_{\vartheta,x}$ für $x \in \{\xi_\vartheta > 0\}$ sind die R-Z-Ketten zur Irrfahrt mit Verteilung μ_ϑ bereits $k[\cdot,\vartheta]$-Ketten zu der R-Z-Kette zur Irrfahrt mit Verteilung μ_{ϑ_0}. Die Funktionen $k[\cdot,\vartheta]$ sind sogar extremal, wenn die Bedingung (B3) erfüllt ist.

3.6 Beispiel
Sei G die Gruppe $\{0,1\}$ (0+0=1+1=0 und 0+1=1+0=1). Wir betrachten die R-Z-Kette auf $\{0,1\} \times \mathbb{N}_0$ zur Irrfahrt mit Verteilung $\mu := \varepsilon_1$. Dann ist $\tilde{\mu} = \mu \otimes \varepsilon_1 = \varepsilon_{(1,1)}$, und die kleinste abgeschlossene Gruppe $G(\tilde{\mu})$, die den Träger von $\tilde{\mu}$ umfaßt, ist $\{(0,2z),(1,2z+1) \mid z \in \mathbb{Z}\}$, d.h. $G(\tilde{\mu})$ ist eine echte Teilmenge von $G \times \mathbb{Z}$. Da die R-Z-kette bei Start in einem Punkt aus $G(\tilde{\mu})$ fast sicher in $G(\tilde{\mu})$ bleibt und dasselbe auch für das Komplement von $G(\tilde{\mu})$ gilt, ist die beschränkte Funktion $1_{G(\tilde{\mu})}$ $\tilde{\mu}$-harmonisch. Damit ist die Konstante 1 nicht extremal für die R-Z-Kette.

3.7 Bemerkung und Bezeichnungen

1.) Das Beispiel 3.6 zeigt, daß es bei der Untersuchung der Frage, wann die Bedingung (B3) aus Satz 3.4 erfüllt ist, also wann die Konstante 1 extremal für die Raum-Zeit-Kette ist, legitim ist, sich auf solche Irrfahrten zu beschränken, bei denen von jedem Punkt des Zustandsraums mit positiver Wkt. schließlich die kleinste abgeschlossene Gruppe $G(\tilde{\mu})$ bzw. Halbgruppe $H(\tilde{\mu})$ oberhalb des Trägers von $\tilde{\mu}$ erreicht wird. Die Raum-Zeit-Kette zu einer Irrfahrt mit Verteilung auf der Gruppe G bzw. der Halbgruppe H (dies ist nach 2.7 wieder eine Irrfahrt mit Verteilung $\tilde{\mu} = \mu \otimes \varepsilon_1$) muß also folgende Eigenschaft besitzen:

(GT) Für alle $(x,n) \in G \times \mathbb{Z}$ gilt:

$P_x[\liminf_{m\to\infty}\{(X_m, m+n) \in G(\tilde{\mu})\}] > 0$, falls G Gruppe ist, bzw.

(HT) Für alle $(x,n) \in H \times \mathbb{N}_0$ gilt:

$P_x[\liminf_{m\to\infty}\{(X_m, m+n) \in H(\tilde{\mu})\}] > 0$, falls H Halbgruppe ist.

2.) Diese Eigenschaft ist für $(x,n) \in G(\tilde{\mu})$ bzw. $(x,n) \in H(\tilde{\mu})$ immer erfüllt, da die Kette mit Wkt. 1 in $G(\tilde{\mu})$ bzw. $H(\tilde{\mu})$ bleibt, wenn sie diesen Bereich einmal erreicht hat. $G(\tilde{\mu})$ und $H(\tilde{\mu})$ sind also absorbierende Mengen.

3.) Die Ereignisse $\liminf_{m\to\infty}\{(X_m, m+n) \in G(\tilde{\mu})\}$ und $\liminf_{m\to\infty}\{(X_m, m+n) \in H(\tilde{\mu})\}$ liegen in der σ-Algebra $\mathcal{A}_\infty$ der asymptotischen Ereignisse. Ist also $\mathcal{A}_\infty$ f.s. trivial, dann haben diese Mengen wegen 2.) für alle (x,n) die Wkt. 1.

4.) Ist G Gruppe, dann ist die Eigenschaft (GT) äquivalent zu (GT') $G(\tilde{\mu}) = G \times \mathbb{Z}$. Da aus (GT') natürlich (GT) folgt, ist offenbar nur $G(\tilde{\mu}) \supset G \times \mathbb{Z}$ zu zeigen. Sei also $(x,n) \in G \times \mathbb{Z}$. Nach Voraussetzung existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $P_x[(X_m, m+n) \in G(\tilde{\mu})] > 0$, also ist $(x+T(\mu^m), m+n) \cap G(\tilde{\mu}) \neq \emptyset$. Dann ist aber bereits $(x,n) \in G(\tilde{\mu})$, da für alle $m \in \mathbb{N}$ $(T(\mu^m), m) \subset G(\tilde{\mu})$ ist.

5.) Aus (GT') folgt $G(\mu)=G$, denn es ist
$T(\tilde{\mu})=T(\mu) \times \{1\} \subset G(\mu) \times \mathbb{Z}$ und damit auch
$G(\tilde{\mu})=G \times \mathbb{Z} \subset G(\mu) \times \mathbb{Z}$, also $G \subset G(\mu)$, d.h. $G=G(\mu)$.
6.) Für Halbgruppen H ist die Bedingung (HT) schwächer als (HT'): $H(\tilde{\mu}) = (H \times \mathbb{N}) \cup \{(e,0)\}$. Dies zeigt das folgende Beispiel.

3.8 Beispiel: "Fairer Münzwurf"

Sei H die Halbgruppe $\mathbb{N}_0$ und μ die Verteilung $\frac{1}{2}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)$, also $\tilde{\mu} = \mu \otimes \varepsilon_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_{(0,1)} + \varepsilon_{(1,1)})$. Dann ist $H(\mu) = \mathbb{N}_0$ und $H(\tilde{\mu}) = \{(x,m) \in \mathbb{N}_0^2 \mid |x| \leq m\}$, also echte Teilmenge von $H \times \mathbb{N} \cup \{0\}$, aber für die R-Z-Irrfahrt $\tilde{X}_n = (X_n, n)$ mit Verteilung $\tilde{\mu}$ ist (HT) erfüllt, denn:
Jeder Punkt $(x,n) \notin H(\tilde{\mu})$ ist von der Form $(n+k,n)$ mit $k \in \mathbb{N}$, also ist $P_{n+k}[(X_k, n+k) \in H(\tilde{\mu})] = (\frac{1}{2})^k > 0$.
Der Bereich $H(\tilde{\mu})$ wird somit mit positiver Wkt. erreicht.

Nach 1.6.6 ist die Konstante 1 genau dann extremal für die R-Z-Kette zu einer Irrfahrt mit Verteilung μ, wenn die beschränkten R-Z-harmonischen Funktionen konstant sind. Deshalb ist für die Gültigkeit von (B3) der folgende nach Choquet und Deny benannte Satz von großem Interesse. Der Satz taucht in der Literatur in verschiedenen Versionen auf. Den hier angeführten Beweis findet man für Gruppen bei MEYER[19], VIII T7. Er läßt sich ohne weiteres auf Halbgruppen verallgemeinern. Die Beweisidee stammt von DOOB-SNELL-WILLIAMSON [9] (Theorem 4), die die Extremalität der Konstanten 1 für Irrfahrten im $\mathbb{Z}^d$ ($d \in \mathbb{N}$) zeigten.

3.9 Satz von Choquet-Deny

Ist $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ Irrfahrt mit Verteilung μ auf der Halbgruppe $(H,\cdot)$, dann gilt für beschränkte, harmonische Funktionen h:
Für jedes $x \in H$ ist $h(x)=h(x \cdot y)$ für μ-fast alle $y \in H$.

Beweis:
$\mathcal{H}$ sei die σ-Algebra der Borelmengen in H. Auf $\mathcal{H}^{\mathbb{N}_0}$ betrachten wir für $x \in H$ die W-Maße $W_x := \varepsilon_x \otimes (\bigotimes_{i \in \mathbb{N}} \mu)$.

Für $i \in \mathbb{N}_0$ seien Z_i die Projektionen, für $n \in \mathbb{N}_0$ $Y_n := \sum_{i=0}^{n} Z_i$ und $\mathfrak{F}_n := \mathcal{A}(Z_0, .., Z_n)$. Ist h eine beschränkte, harmonische Funktion, dann ist nach 1.6.4 $(h(Y_n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ beschränktes Martingal bezgl. $(\mathfrak{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ für jedes Maß W_x, also existiert $\lim_{l \to \infty} h(Y_l)$ W_x-fast sicher für alle $x \in H$. Damit gilt aber nach BAUER[4], 60.3
$E_x[\lim_{l \to \infty} h(Y_l) | \mathfrak{F}_k] = h(Y_k)$ W_x-fast sicher für alle $x \in H$ und $k \in \mathbb{N}_0$.
$\lim_{l \to \infty} h(Y_l)$ ist symmetrische Zufallsvariable (d.h. invariant unter jeder Permutation von endlich vielen $l \in \mathbb{N}$) und damit nach HEWITT-SAVAGE[14], 11.3 W_x-fast sicher einer Konstanten $c_x \in \mathbb{R}_+$ für alle $x \in H$. Also ist $c_x = E_x[c_x | \mathfrak{F}_k] = h(Y_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $x \in H$. Das heißt aber bereits $h(x) = h(Y_0) = h(Y_1)$ W_x-fast sicher für alle $x \in H$, und damit $h(x) = h(x \cdot y)$ für μ-fast alle $y \in H$. ⌟

3.10 Folgerung
Ist $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ Irrfahrt mit Verteilung μ auf der Gruppe G bzw. der Halbgruppe H und ist (GT) bzw. (HT) erfüllt, so sind die beschränkten, stetigen, R-Z-harmonischen Funktionen konstant auf $G \times \mathbb{N}_0$ bzw. $H \times \mathbb{N}_0$.
Beweis:
Sei zunächst H Halbgruppe. Die zugehörige R-Z-Kette ist nach 2.7 wieder Irrfahrt auf $H \times \mathbb{N}_0$ mit Verteilung $\tilde{\mu} = \mu \otimes \varepsilon_1$. Nach dem Satz von Choquet-Deny gilt also für stetiges, beschränktes, R-Z-harmonisches h :
$h(x,n) = h(x \cdot y, n+m)$ für $\tilde{\mu}$-fast alle $(y,m) \in H \times \mathbb{N}_0$.
Sei jetzt $A := \{(y,m) \in H \times \mathbb{N}_0 \mid h(x,n) = h(x \cdot y, n+m)\ \forall (x,n) \in H \times \mathbb{N}_0\}$.
Dann gilt: A ist abgeschlossen(da h stetig ist),
A umfaßt den Träger von $\tilde{\mu}$, und A ist Halbgruppe,
also insgesamt $A \supset H(\tilde{\mu})$, d.h. h ist konstant auf $H(\tilde{\mu})$.

Sei jetzt $(y,m)\in H\times\mathbb{N}_0$, dann existiert wegen Bedingung (HT) ein $(x,n)\in H(\tilde{\mu})$ mit $(x\cdot y,n+m)\in H(\tilde{\mu})$, also $h(y,m)=h(x\cdot y,n+m)$ und damit h überall konstant.
Sei jetzt G Gruppe. Wir machen zunächst folgende Vorbetrachtung:
Jede beschränkte, stetige, R-Z-harmonische Funktion h auf $G\times\mathbb{N}_0$ läßt sich induktiv zu einer harmonischen Funktion h auf $G\times\mathbb{Z}$ fortsetzen durch:
$h(x,-1):=\int h(x\cdot y,0)\,\mu(dy)$ und für $n>1$
$h(x,-n):=\int h(x\cdot y,-n+1)\,\mu(dy)$ $(x\in G)$.
h ist auf $G\times\mathbb{Z}$ beschränkt und nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz stetig. Definiert man dann:
$A:=\{(y,m)\in G\times\mathbb{Z} \mid h(x,n)=h(x\cdot y,n+m)\ \forall (x,n)\in G\times\mathbb{Z}\}$,
so gilt analog: A ist abgeschlossen, $A\supset T(\tilde{\mu})$, und A ist Gruppe, also insgesamt $A\supset G(\tilde{\mu})$. Wegen (GT') ist h damit konstant auf $G\times\mathbb{Z}$, also auch auf $G\times\mathbb{N}_0$. ⌟

3.11 Folgerung

1.) Für ein W-Maß μ auf einer diskreten Gruppe mit (GT) bzw. einer diskreten Halbgruppe mit (HT) gilt:
Die Konstante 1 ist extremal für die R-Z-Kette zur Irrfahrt mit Verteilung μ.
2.) Sei auf einer diskreten Gruppe G die Exponentialfamilie $(\mu_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta}$ (zu μ_{ϑ_0}) gegeben. Erfüllt dann μ_{ϑ_0} die Bedingung (GT), dann ist (B3) erfüllt.
Ist G diskrete Halbgruppe und erfüllt μ_{ϑ_0} die Bedingung (HT), so sind die Funktionen $k[.,\vartheta]$ ebenfalls extremal.

Beweis:

zu 1.): Sei h R-Z-harmonisch und beschränkt. Da im Diskreten jede Funktion stetig ist, ist nach 3.10 h konstant und damit die Konstante 1 extremal.
zu 2.): Sei zunächst G Gruppe. Da nach 2.8 b) Exponentiale auf Gruppen strikt positiv sind, gilt für die W-Maße $(\mu_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta}$ der Exponentialfamilie $T(\mu_\vartheta)=T(\mu_{\vartheta_0})$ für alle $\vartheta\in\Theta$. Ist also (GT) für μ_{ϑ_0} erfüllt, so auch für alle μ_ϑ. Wegen Teil 1.) ist dann (B3) erfüllt.

Ist H Halbgruppe, so betrachte man für $\vartheta \in \Theta$ die Raum-Zeit-Kette zur Irrfahrt mit Verteilung $\mu_\vartheta = \xi_\vartheta \cdot Z(\vartheta)\mu = k[(.,1),\vartheta]\mu$ (mit den Bezeichnungen aus 3.1 und 3.2) auf der Halbgruppe $\{\xi_\vartheta > 0\} \times \mathbb{N}_0 = \{ k[.,\vartheta] > 0\}$, und dann ist (HT) für μ_ϑ erfüllt.

3.12 Beispiele

1.) Münzwurf (Binomialverteilung auf $\{0,1\}$)

Wir betrachten die Exponentialfamilie zu dem W-Maß $\mu = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)$ aus Beispiel 3.8 zunächst auf der Halbgruppe $(H,\cdot)=(\mathbb{N}_0,+)$. Exponentiale auf $(\mathbb{N}_0,+)$ sind nach 2.12.2 genau die Funktionen h_a mit $h_a(x) := a^x$ für $a \geq 0$. Die Verteilungen sind also von der Form $\mu_a = h_a \cdot Z(a)\mu$, d.h. $\mu_a(0) = a^0 \cdot Z(a) \cdot \frac{1}{2} = Z(a)/2$ und $\mu_a(1) = a \cdot Z(a) \cdot \frac{1}{2}$. Dabei ist $Z(a)$ so zu bestimmen, daß die μ_a wieder W-Maße sind, also $Z(a) = 2/(a+1)$. Die μ_a sind also wieder Binomialverteilungen auf $\{0,1\}$ mit Parameter $\frac{a}{a+1}$. Für $a := \frac{p}{1-p}$ (dann ist $p = \frac{a}{a+1}$) ergeben sich gerade die Binomialverteilungen mit Parameter $p \in [0,1)$.

Nach 3.8 ist Bedingung (HT) erfüllt. Das bedeutet wegen 3.11, daß für $a \geq 0$ die Funktionen $k[.,a]$ mit $k[(x,n),a] = a^x \cdot Z(a)^n = a^x \cdot (\frac{2}{a+1})^n$ für $(x,n) \in H \times \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}_0^2$ extremale Funktionen für die R-Z-Kette zur Irrfahrt mit Verteilung μ sind.

Betrachtet man die Irrfahrt mit Verteilung μ jedoch auf der Gruppe $(\mathbb{Z},+)$, so ist $h_0 = 1_{\{0\}}$ kein Exponential, und deshalb besteht die Exponentialfamilie nur aus den μ_a mit $a > 0$. Die Funktion $k[.,0]$ mit

$$k[(x,n),0] = 0^x 2^n = \begin{cases} 2^n & \text{für } x=0 \text{ und} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad ((x,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0)$$

ist nicht einmal harmonisch. Die $k[.,a]$ mit $a > 0$ sind extremal, da (GT) erfüllt ist. Es ist nämlich $G(\tilde{\mu}) = G(\{(1,1),(1,1)\}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = G(\mu) \times \mathbb{Z}$.

2.) p-q-Irrfahrten auf $\mathbb{Z}$

Wir betrachten jetzt die Raum-Zeit-Kette zur Irrfahrt mit Verteilung $\mu = \frac{1}{2}(\varepsilon_{-1} + \varepsilon_1)$ auf $\mathbb{Z}$. Dann ist $G(\tilde{\mu}) = \{(x,z) \in \mathbb{Z}^2 \mid x+z \in 2\mathbb{Z}\}$, also echte Teilmenge von $G(\mu) \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$, (GT) ist also nicht erfüllt, und $H(\tilde{\mu}) = \{(x,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0 \mid x+n \in 2\mathbb{Z} \text{ und } |x| \leq n\}$. Damit ist auch (HT) nicht erfüllt, da die Kette etwa bei Start in (1,0) sich mit Wkt. 1 stets außerhalb $H(\tilde{\mu})$ aufhält. Demzufolge ist in beiden Fällen die Konstante 1 nicht extremal. Betrachtet man die Irrfahrt dagegen auf dem Zustandsraum $H(\tilde{\mu})$, so ist, wie man sofort sieht, die Funktion k mit $k(x,n) := \begin{cases} 2^x & \text{für } x=n \text{ und } ((x,n) \in H(\tilde{\mu})) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ extremal, während sie auf dem Produktraum $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0$ nicht einmal harmonisch ist.

3.13 Bemerkung

Die Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Exponentialfamilien und extremalen Funktionen geht auf ABRAHAMSE [1] zurück. ABRAHAMSE untersucht Raum-Zeit-Ketten zu Irrfahrten mit Verteilung μ auf $\mathbb{Z}$ mit Zustandsraum $E' := \{(x,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0 \mid P_0(X_n = x) > 0\}$. E' ist also der Bereich, in dem sich die Kette bei Start in 0 fast sicher aufhält. Da $E' = H(\tilde{\mu})$ ist, besagt die Bedingung (HT) hier gerade:
Bei Start in einem beliebigen Punkt aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0$ gelangt man mit positiver Wkt. nach E'. ABRAHAMSE behauptet nun, daß sich Exponentiale auf dem Zustandsraum E', welcher im allgemeinen echte Teilmenge des Produktraumes $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0$ ist, stets als Produkt zweier Exponentiale auf $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}_0$ darstellen lassen. Diese Behauptung ist falsch, wie das Beispiel 3.12.1 zeigt:
Die Funktion k mit $k(x,n) = \begin{cases} 2^n & x=n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ für $(x,n) \in E'$ ist Exponential auf E', aber nicht das Produkt zweier Exponentiale von $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}_0$, denn diese sind von der Form h_a mit $h_a(x) = a^x$ für $a > 0$ bzw. $a \geq 0$.

Im folgenden wird die Gültigkeit der Bedingung (B3) zunächst für Gruppen untersucht. Dazu benötigen wir einen Satz von AZENCOTT[3]. Zur Einführung der dort verwendeten Begriffe dient das folgende Lemma.

3.14 Lemma

Sei μ ein W-Maß auf der σ-Algebra $\mathfrak{H}$ der Gruppe G und Q der zugehörige Faltungskern. Dann existiert nach DOOB[8], Suppl. §2 für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in G$ die Lebesgue-Zerlegung des Maßes $Q^n(x,.)=f_n(x,.)\tau + Q_n^1(x,.)$ bezgl. des Haarmaßes τ, wobei $f_n \in \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}_+$ und $Q_n^1(x,.)$ singulär zu τ ist. Definiert man für $x \in G$ $g_n(x) := Q_n^1(x,G)$, so gilt:

1.) g_n ist konstant auf G.

2.) Für $n,l \in \mathbb{N}$ ist $g_{n+l} \leq g_n \cdot g_l$. Die $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind also absteigend.

Der Limes der $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird mit g bezeichnet.

Beweis:

zu 1.): Zunächst ist für $x \in G$, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathfrak{H}$

$Q^n(x,A) = \langle 1_A f_n(x,.), \tau \rangle + Q_n^1(x,A) = [\varepsilon_x * Q^n(e,.)](A)$

$= [\varepsilon_x * f_n(e,.)\tau](A) + [\varepsilon_x * Q_n^1(e,.)](A)$,

also ist $Q_n^1(x,A) = [\varepsilon_x * Q_n^1(e,.)](A)$ für alle $A \in \mathfrak{H}$ mit $\tau(A)=0$.

Da aber beide Maße singulär zu τ sind, sind sie bereits gleich, d.h. aber

$g_n(x) = Q_n^1(x,G) = [\varepsilon_x * Q_n^1(e,.)](G) = Q_n^1(e,G) = g_n(e)$.

zu 2.): Da für jedes Maß ι auf $\mathfrak{H}$ $\tau * \iota \ll \tau$ gilt, ist für $n,l \in \mathbb{N}$ $f_{n+l}(e,.)\tau + Q_{n+l}^1(e,.) = \mu^{n+l}$

$= \mu^n * \mu^l = [f_n(e,.)\tau + Q_n^1(e,.)] * [f_l(e,.)\tau + Q_l^1(e,.)]$

$= f\tau + Q_n^1(e,.) * Q_l^1(e,.)$ mit $f \in \mathfrak{H}_+$, also

$Q_{n+l}^1(e,.) \leq Q_n^1(e,.) * Q_l^1(e,.)$, speziell

$Q_{n+l}^1(e,G) \leq Q_n^1(e,G) \cdot Q_l^1(e,G)$. Das heißt aber bereits $g_{n+l}(e) \leq g_n(e) \cdot g_l(e)$. Für $l=1$ ergibt sich: $g_{n+1}(e) \leq g_n(e) \cdot g_1(e) \leq g_n(e)$, da $g_1(e) \leq Q(e,G)=1$, also sind die $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ absteigend. ⌟

3.15 Satz (AZENCOTT[3], Prop.I.6)
Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Irrfahrt auf der Gruppe G mit Verteilung μ und ist μ ausgebreitet, so sind die beschränkten μ-harmonischen Funktionen stetig.

Beweis:
Nach Voraussetzung (siehe 2.19.1) existiert ein $n\in\mathbb{N}$ mit $\mu^n = f_n(e,.)\tau + Q_n^1(e,.)$, wobei $f_n(e,.)\not\equiv 0\ [\tau]$, wenn man die Bezeichnungen aus 3.14 übernimmt. Es ist also $Q_n^1(e,G) = g_n(e) < 1$. Für beliebiges $p\in\mathbb{N}$ gilt ja
$(\mu^p)^n = \mu^{np} = f_{np}(e,.)\tau + Q_{np}^1(e,.)$, also
$\| \mu^{np} - f_{np}(e,.)\tau \| = \| Q_{np}^1(e,.) \| = g_{np}(e) \leq [g_n(e)]^p$ wegen 3.14.
Die Spiegelung des Maßes μ^{np} (zur Definition siehe 2.17.1) ist dann $\hat{\mu}^{np} = \hat{f}_{np}(e,.)\tau + Q_{np}^1(e,.)$ mit $\hat{f}_{np}(e,x) := f_{np}(e,x^{-1})$ für $x\in G$.
Sei jetzt h beschränkt und μ-harmonisch. Es gilt für alle $x\in G$
$h(x) = \int h(x\cdot y)\, \mu^{np}(dy) = \int h(x\cdot y^{-1})\, \hat{\mu}^{np}(dy)$, also ist
$| h(x) - h * \hat{f}_{np}(e,.)(x) | = | h(x) - \int h(y) \hat{f}_{np}(e, y^{-1}\cdot x)\, \tau(dy) |$ (nach 2.16)
$= | \int h(x\cdot y^{-1})\, \hat{\mu}^{np}(dy) - \int h(y) f_{np}(e, y\cdot x^{-1})\, \tau(dy) |$
$= | \int h(x\cdot y)\, \mu^{np}(dy) - \int h(x\cdot y) f_{np}(e,y)\, \tau(dy) |$
$\leq \| h \|_\infty \cdot \| \mu^{np} - f_{np}(e,.)\tau \| \leq \| h \|_\infty \cdot [g_n(e)]^p \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$.
Da h beschränkt und $\hat{f}_{np}(e,.)$ τ-integrierbar ist, ist nach 2.16.2 $h * \hat{f}_{np}(e,.)$ stetig. h ist also gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen und damit selbst stetig. ⌟

Satz 3.15 läßt sich auf Raum-Zeit-Ketten übertragen:

3.16 Satz
Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Irrfahrt mit Verteilung μ auf der Gruppe G mit (GT) und ist μ ausgebreitet, so ist die Konstante 1 extremal für die Raum-Zeit-Kette auf $G\times\mathbb{N}_0$. Speziell gilt: Ist $(\mu_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta}$ eine Exponentialfamilie zu obigem W-Maß μ, dann ist Bedingung (B3) erfüllt.

Beweis:
Nach Voraussetzung ist μ ausgebreitet bezgl. des Haarmaßes τ von G. Dann ist aber $\tilde{\mu} := \mu \otimes \varepsilon_1$ ausgebreitet bezgl. des Haarmaßes $\tilde{\tau} := \tau \otimes (\sum_{z \in Z} \varepsilon_z)$ von $G \times Z$.

Besitzt nämlich μ^n für ein $n \in \mathbb{N}$ einen τ-stetigen Anteil, so besitzt $\tilde{\mu}^n = \mu^n \otimes \varepsilon_n$ einen $\tilde{\tau}$-stetigen Anteil. Sei jetzt h eine beschränkte, harmonische Funktion für die R-Z-Kette auf $G \times \mathbb{N}_0$. h ist dann $\tilde{\mu}$-harmonisch auf $G \times \mathbb{N}_0$ und läßt sich beschränkt, harmonisch fortsetzen auf die Gruppe $G \times Z$. Nach Satz 3.15 ist h stetig und, da (GT) erfüllt ist, nach Folgerung 3.10 konstant auf $G \times Z$, also auch auf $G \times \mathbb{N}_0$. Damit ist aber für eine Exponentialfamilie zu μ Bedingung (B3) erfüllt, denn die μ_ϑ besitzen für $\vartheta \in \Theta$ denselben Träger wie μ, da Exponentiale auf Gruppen strikt positiv sind. Also ist (GT) auch für alle μ_ϑ erfüllt. Ist μ ausgebreitet, dann natürlich auch alle μ_ϑ für $\vartheta \in \Theta$, also ist die Konstante 1 extremal für die R-Z-Kette zur Irrfahrt mit Verteilung μ_ϑ für jedes $\vartheta \in \Theta$. ⌟

3.17 Exponentialfamilien und Martinrand

1.) Ist jetzt auf der Gruppe G (mit dem Haarmaß τ) für jedes ϑ aus einer Parametermenge Θ ein W-Maß $\mu_\vartheta = C(\vartheta) \cdot \psi_\vartheta \cdot f \cdot \tau$ gegeben, wobei ψ_ϑ Exponential auf G ist, $C(\vartheta)$ Normierungskonstante und $f \in \mathcal{L}_+$, so bilden die $(\mu_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta}$ bereits eine Exponentialfamilie im Sinne der Definition 3.1, da für ein festes $\vartheta_0 \in \Theta$

$\mu_\vartheta = Z(\vartheta) \cdot \xi_\vartheta \cdot \mu_{\vartheta_0}$ ist, wenn man $Z(\vartheta) := \frac{C(\vartheta)}{C(\vartheta_0)}$ und $\xi_\vartheta := \frac{\psi_\vartheta}{\psi_{\vartheta_0}}$ definiert.
Da Exponentiale auf Gruppen stetig sind, sind die Funktionen $k[\cdot, \vartheta]$ mit $k[(x,n), \vartheta] := \xi_\vartheta(x) \cdot Z(\vartheta)^n$ für $(x,n) \in G \times \mathbb{N}_0$ stetig und nach Satz 3.4 auch extremal, da μ_{ϑ_0} ausgebreitet ist bezgl. τ und damit Bedingung (B3) erfüllt ist.

Außerdem ist $P_{\vartheta,x}=P_x^{k[\cdot,\vartheta]}$ für alle x mit $k[(x,0),\vartheta]>0$, also auf ganz G.

Nach 2.18 sind die Voraussetzungen zur Konstruktion des Martinrandes erfüllt. Sind auch die Voraussetzungen von 1.8.5 und 1.8.6 erfüllt, so gilt

$\widetilde{X}_n=(X_n,n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \widetilde{X}_\infty := \lim_{n\to\infty}(X_n,n)=m_\vartheta \quad P_{\vartheta,\cdot}$-fast sicher,

wobei m_ϑ ein Punkt des Martinrandes M ist. Die Abbildung $\vartheta \to m_\vartheta$ von Θ nach M ist injektiv, denn aus $m_{\vartheta_1}=m_{\vartheta_2}$ für $\vartheta_1,\vartheta_2\in\Theta$ folgt die Gleichheit der Darstellungsmaße $\sigma^{k[\cdot,\vartheta_1]}=\sigma^{k[\cdot,\vartheta_2]}$. Damit sind nach 1.8.5 e) bereits die Funktionen gleich, da sie als Exponentiale stetig sind. Die Parametermenge Θ läßt sich also als Teilmenge des Martinrandes interpretieren.

2.) Untersuchen wir jetzt die Frage, wann die Voraussetzungen von 1.8.5 und 1.8.6 erfüllt sind, so gilt zunächst einmal: Die Funktionen $k[\cdot,\vartheta]$ sind als stetige Funktionen auf kompakten Mengen beschränkt, also lokal integrierbar bezgl. des Maßes $\tilde{\tau} := \tau \otimes (\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \varepsilon_n)$. Wir benötigen also eine Bezugsfunktion r, so daß alle $k[\cdot,\vartheta]$ $r\tilde{\tau}$-integrierbar sind. Falls es eine Bezugsfunktion r gibt, kann r so gewählt werden, daß nur Masse auf der Achse n=0 liegt, d.h. daß r für $(x,n)\in G\times\mathbb{N}_0$ von der Form $r(x,n)=\begin{cases} s(x) & \text{für } n=0 \text{ und} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ für eine stetige, strikt positive Funktion s auf G ist mit $\langle \xi_\vartheta \cdot s, \tau\rangle < \infty$ für alle $\vartheta\in\Theta$.

In Spezialfällen läßt sich so eine Funktion angeben.

Ist etwa $(G,\circ)=(\mathbb{R}^d,+)$, die ξ_ϑ also von der Form $(x_1,..,x_d)\to\prod_{i=1}^d \vartheta_i^{a_i}$ mit $\vartheta_i>0$ für i=1,..,d, so erfüllt s mit $s(x):=\prod_{i=1}^d e^{-x_i^2}$ für $x=(x_1,..,x_d)\in\mathbb{R}^d$ die gewünschten Bedingungen.

Auf $(G,\circ)=(\mathbb{Z}^d,+)$ kann für s die Funktion $(x_1,..,x_d)\longrightarrow\prod_{i=1}^d 1/|x_i|!$ gewählt werden.

Wir wissen bereits, daß die Konstante 1 extremal ist für die Raum-Zeit-Kette zur Irrfahrt auf der Gruppe G mit Verteilung μ, wenn μ ausgebreitet ist. Umgekehrt untersuchen wir jetzt, welche Eigenschaften die Extremalität der Konstanten 1 impliziert.

3.18 Definition (ROUDIER [21])
Eine Irrfahrt mit Verteilung μ auf der Gruppe G mit dem Haarmaß τ heißt τ-stetig im Unendlichen, falls der singuläre Anteil von $Q^n(e,.)$ gegen 0 konvergiert, also $g=\lim_{n\to\infty} g_n$ aus dem Lemma 3.14 gleich 0 ist.

3.19 Satz
Ist die σ-Algebra $\mathfrak{J}$ der invarianten Ereignisse f.s. trivial, so ist die Irrfahrt τ-stetig im Unendlichen.
Beweis:
Zunächst gilt für alle $x\in G$ $P_x \ll P_\tau$ auf $\mathfrak{J}$, denn sei für ein $\Gamma\in\mathfrak{J}$ $P_\tau(\Gamma)=0$, dann ist nach Voraussetzung $P_x(\Gamma)=0$ für alle $x\in G$ oder $P_x(\Gamma)=1$ für alle $x\in G$. Der zweite Fall kann aber nicht eintreten, denn dann wäre $P_\tau(\Gamma)=\int P_x(\Gamma)\,\tau(dx)>0$.
Mit den Bezeichnungen aus dem Lemma 3.14 existiert ja zu jedem $n\in\mathbb{N}$ eine Menge $N_n\in\mathfrak{B}$ mit $\tau(N_n)=0$ und $Q^n(e,N_n)=Q_n^1(e,N_n)=Q_n^1(e,G)=g_n(e)$. Bezeichnen wir mit N die Vereinigung aller N_n für $n\in\mathbb{N}$, so ist natürlich auch $\tau(N)=0$, und damit nach 2.17.2 auch $\tau Q^n(N)=0$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Das bedeutet aber $P_\tau[X_n\in N]=\int P_x[X_n\in N]\,\tau(dx)$ $=\int Q^n(x,N)\,\tau(dx)=\tau Q^n(N)=0$ für alle $n\in\mathbb{N}$, also auch $P_\tau[\limsup_{n\to\infty}\{X_n\in N\}]=0$. Nach der Anfangsbemerkung ist dann auch $P_e[\limsup_{n\to\infty}\{X_n\in N\}]=0$ und nach dem Lemma von Fatou auch $\limsup_{n\to\infty} P_e[X_n\in N]=\lim_{n\to\infty} P_e[X_n\in N]=0$. Das heißt aber $0=\lim_{n\to\infty} Q^n(e,N)\geq\lim_{n\to\infty} Q^n(e,N_n)=\lim_{n\to\infty} g_n(e)=g(e)$, also ist $g\equiv 0$. ⌟

Zusammenfassen kann man das in folgendem:

3.20 Satz

Für Irrfahrten mit Verteilung μ auf der Gruppe G mit Bedingung (GT) sind äquivalent:

a) 1 ist extremal für die R-Z-Kette.

b) μ ist ausgebreitet.

c) Die Irrfahrt ist stetig im Unendlichen.

Beweis:

a)$\rightarrow$ c): 1 ist extremal für die R-Z-Kette, also ist nach 1.6.8 $\mathcal{G}_\infty$ f.s. trivial und wegen $\mathcal{I} \subset \mathcal{G}_\infty$ (1.5.3) auch $\mathcal{I}$ f.s. trivial. Damit ist nach Satz 3.19 die Irrfahrt stetig im Unendlichen.

c)$\rightarrow$b): Wir nehmen an, μ ist nicht ausgebreitet, also μ^n singulär zum Haarmaß τ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist in Lemma 3.14 $\mu^n = Q^n(e,.) = Q_n^1(e,.)$, also $1 = Q^n(e,G) = Q_n^1(e,G) = g_n(e)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $g(e) = \lim_{n\to\infty} g_n(e) = 1$. Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung c).

b)$\rightarrow$ a): Dies ist die Aussage des Satzes 3.16 . ⌟

3.21 Folgerung

Unter den Voraussetzungen des Satzes 3.20 sind äquivalent:

a) 1 ist extremal für die Kette auf G.

b) 1 ist extremal für die R-Z-Kette auf $G \times \mathbb{N}_0$.

c) $\mathcal{I}$ ist f.s. trivial.

d) $\mathcal{G}_\infty$ ist f.s. trivial.

Beweis:

a) und c) sind nach 1.6.7 äquivalent. b) und d) sind nach 1.6.8 äquivalent. c) folgt aus d), da nach 1.5.3 $\mathcal{I} \subset \mathcal{G}_\infty$ gilt. b) folgt aus c) wegen Satz 3.19 und Satz 3.20. ⌟

Da auf Halbgruppen im allgemeinen kein "Haarmaß" existiert, lassen sich die oben angeführten Ergebnisse für Gruppen nicht ohne weiteres auf Halbgruppen verallgemeinern. An zwei Beispielen werden wir sehen, welche Phänomene in diesem Zusammenhang auftreten können.

3.22 Beispiel

Als Halbgruppe H betrachten wir $\mathbb{R}_+$ mit der Verknüpfung $x \circ y := x \vee y$ für $x,y \in H$ (siehe auch 2.14.4 a) und der üblichen Topologie.

1.) Es existiert kein "Haarmaß" auf der σ-Algebra $\mathcal{B}$ der Borelmengen, d.h. kein Borelmaß τ mit $\tau(H) > 0$ und $\varepsilon_x * \tau = \tau$ für alle $x \in H$.

Beweis:

Wir nehmen an, es existiert ein Haarmaß τ. Dann gilt nach 2.14.3 für $x,y \in H$

$$\varepsilon_x * \tau(\{y\}) = \begin{cases} 0 & \text{für } x > y, \\ \tau(\{y\}) & \text{für } x < y \text{ und} \\ \tau[0,y] & \text{für } x = y. \end{cases}$$

Da $\tau(H) > 0$ ist, existiert ein $y \in H$ mit $\tau[0,y] = \varepsilon_y * \tau(\{y\}) = \tau(\{y\}) > 0$. Dies führt aber für $x > y$ wegen $\varepsilon_x * \tau(\{y\}) = 0 \neq \tau(\{y\})$ zu einem Widerspruch.

2.) Ist $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ Irrfahrt auf H mit Verteilung μ und ist die Bedingung (HT) erfüllt (dies ist genau dann der Fall, wenn der Träger von μ nicht beschränkt ist), so ist die Konstante 1 extremal für die R-Z-Kette.

Beweis:

Ist h beschränkt, R-Z-harmonisch auf $H \times \mathbb{N}_0$, so gilt nach dem Satz von Choquet-Deny für jedes $(x,n) \in H \times \mathbb{N}_0$ $h(x,n) = h(x \circ y, n+1)$ für μ-fast alle $y \in H$. Für $x=0$ ergibt sich $c_n := h(0,n) = h(.,n+1)$ $[\mu]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Die c_n sind bereits alle gleich, denn gäbe es ein $c_n \neq c_0$ mit minimalem $n \in \mathbb{N}$, dann wäre für ein $x \in H$ $c_{n-1} = h(0,n-1) = h(x,n) = h(x \vee y, n+1)$ für μ-fast alle $y \in H$. Der letzte Ausdruck ist aber für μ-fast alle $y \geq x$ gleich $h(y,n+1) = c_n$, was zu einem Widerspruch führt. Sei jetzt $(x_0,n_0) \in H \times \mathbb{N}_0$ beliebig gewählt. Dann ist $h(x_0,n_0) = h(x_0 \vee y, n_0+1) = c_0$ für μ-fast alle $y \geq x_0$, also $h \equiv c_0$. ⌟

3.23 Beispiel

Für $a_0 > 0$ betrachten wir die Halbgruppe $H:=[0,a_0]$ mit der Verknüpfung $x \cdot y := x \vee y$ für $x,y \in H$ (siehe 2.14.4 b) und der üblichen Topologie.

1.) Ist μ die Gleichverteilung auf $[0,a_0]$, also $\mu = \frac{1}{a_0} 1_{[0,a_0]} \lambda$, so gilt für die n-fache Faltung von μ $\mu^n = f_n \cdot 1_{[0,a_0]} \lambda$, wobei $f_n(x) = n \cdot \frac{x^{n-1}}{a_0^n}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in H$ ist.

μ^n konvergiert in der schwachen Topologie für $n \to \infty$ gegen die Einheitsmasse im Punkte ε_{a_0}.

Beweis:

Für ein W-Maß υ werde wie in 2.14.2 mit F_υ die Verteilungsfunktion bezeichnet, also für $x \in H$ $F_\upsilon(x) = \upsilon[0,x]$.

Dann ist $F_{\mu^n}(x) = [F_\mu(x)]^n = (\frac{x}{a_0})^n = \int_{[0,x]} f_n \, d\lambda$.

μ^n besitzt also bezgl. des auf $[0,a_0]$ eingeschränkten Lebesgue-Maßes die Dichte f_n. Außerdem gilt punktweise $\lim_{n\to\infty} F_{\mu^n} = 1_{(a_0)} = F_{\varepsilon_{a_0}}$ auf H und damit der zweite Teil der Behauptung.

2.) Auf $H=[0,a_0]$ gilt für ein beliebiges W-Maß υ

$\upsilon * \varepsilon_a = \varepsilon_a$, da $F_{\upsilon * \varepsilon_a} = F_\upsilon \cdot F_{\varepsilon_a} = F_\upsilon(a) \cdot 1_{[a]} = 1_{[a]} = F_{\varepsilon_a}$.

ε_a ist also nach 2.5.2 für jede Irrfahrt mit Ü-Kern Q Q-invariant, und für alle $x \in H$ ist $\varepsilon_x * \varepsilon_a = \varepsilon_a$, d.h. ε_a ist "Haarmaß" auf H.

3.) Wir sind jetzt in der Lage eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür anzugeben, daß in diesem Beispiel die Konstante 1 extremal für die Raum-Zeit-Kette ist. Sei $\upsilon \in \mathfrak{M}_1(H)$. Dann gilt:

Die 1 ist genau dann extremal für die Raum-Zeit-Kette zur Irrfahrt mit Verteilung υ , wenn υ nicht singulär zu ε_{a_0} ist.

Insbesondere ist also für die R-Z-Kette zur Irrfahrt mit der Gleichverteilung auf $[0,a_0]$ aus Teil 1.) die Konstante 1 nicht extremal.

Beweis:

Sei υ nicht singulär zu ε_{a_0}. Dann existiert ein $\mu \in \mathcal{M}_1(H)$ und ein $p \in [0,1)$ mit $\upsilon = (1-p)\cdot \varepsilon_{a_0} + p\cdot\mu$.

Da $\mu * \varepsilon_{a_0} = \varepsilon_{a_0} * \mu = \varepsilon_{a_0}$ gilt, ist für alle $m \in \mathbb{N}$ $\upsilon^m = (1-p^m)\cdot \varepsilon_{a_0} + p^m \cdot \mu^m$. Ist h jetzt R-Z-harmonisch und beschränkt, so gilt für alle $(x,n) \in H \times \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{N}$ $h_n(x) := h(x,n) = \int h(x\vee y, n+m)\, \upsilon^m(dy)$, also

$$|h_n(x) - (1-p^m)\cdot h(a_0,n+m)| = |\int h(x\vee y,n+m)\,\upsilon^m(dy) - (1-p^m)\cdot h(a_0,n$$
$$= |\int h(x\vee y,n+m)\cdot p^m \cdot \mu^m(dy)| \le \|h\|_\infty \cdot p^m \cdot \mu^m(H) = \|h\|_\infty \cdot p^m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Also ist h_n konstant und damit auch h.

Umgekehrt nehmen wir an, υ wäre singulär zu ε_{a_0}, also $\upsilon(\{a_0\}) = 0$. Dann ist die Funktion h mit $h(x) := 1_{[0,a_0]}(x)$ für $x \in H$ υ-harmonisch, denn

$$\int h(x\vee y)\,\upsilon(dy) = \int_{[0,x]} h(x)\,\upsilon(dy) + \int_{(x,a_0]} h(y)\,\upsilon(dy)$$
$$= h(x)\cdot \upsilon[0,x] + \upsilon(x,a_0] \quad (\text{da } h \equiv 1\ [\upsilon])$$
$$= \upsilon[0,a_0] = 1 \text{ für } x \neq a_0 \text{ bzw. } 0 \text{ für } x = a_0, \text{ insgesamt also}$$

gleich h. Also ist die Funktion k mit $k(x,n) := h(x)$ für $(x,n) \in H \times \mathbb{N}_0$ nach 1.6.9 R-Z-harmonisch, beschränkt, aber nicht konstant. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. ⌟

Wir haben bisher Exponentialfamilien untersucht, also Familien von W-Maßen $(\mu_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta}$ auf einer (Halb-) Gruppe G mit einem dominierenden Maß μ_{ϑ_0} (mit $\vartheta_0 \in \Theta$), so daß harmonische Exponentiale $k[\cdot,\vartheta]$ auf $G \times \mathbb{N}_0$ die zugehörigen Dichten $k[(\cdot,1),\vartheta]$ liefern. Unter der Voraussetzung (B3) sind diese Dichten extremale Funktionen für die Raum-Zeit-Kette zur Irrfahrt mit Verteilung μ_{ϑ_0}. Umgekehrt kann man auch folgende Situation betrachten: Gegeben ist eine Familie von W-Maßen $(\mu_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta}$ auf einer (Halb-)Gruppe G, und gesucht sind Bedingungen dafür, daß es sich bereits um eine Exponentialfamilie handelt. Dabei wird sich herausstellen, daß im

wesentlichen die Eigenschaften (B1) und (B2), die im Lemma 3.2 für Exponentialfamilien hergeleitet wurden, hinreichend dafür sind, daß es sich um eine Familie mit dominierendem Maß handelt, wobei harmonische Funktionen auf $G \times \mathbb{N}_0$ die zugehörigen Dichten bestimmen. Unter der Bedingung (B3) und einer zusätzlichen Bedingung (B4) handelt es sich bei der Familie um eine Exponentialfamilie.

Für eine Familie von W-Maßen $(\mu_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta}$ auf einer (Halb-) Gruppe G betrachten wir wie zu Anfang des Kapitels Irrfahrten $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf G mit Faltungskern Q_ϑ zur Verteilung μ_ϑ für $\vartheta\in\Theta$. Dazu wählen wir wieder die kanonische Markoffkette mit W-Maß $P_{\vartheta,x}$ auf dem Produktraum $(\Omega, \mathfrak{F})$.

3.24 Folgerung

Für ein festes $\vartheta_0\in\Theta$ seien folgende vier Bedingungen erfüllt: (B1),(B2),(B3) und

(B4) Extremale Funktionen für die Raum-Zeit-Kette zur Irrfahrt mit Verteilung μ_{ϑ_0} sind bereits Exponentiale auf $G \times \mathbb{N}_0$.

Dann gilt: Die $(\mu_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta}$ bilden bereits eine Exponentialfamilie.

Beweis:

Für $A\in\mathfrak{G}$ gilt $\mu_\vartheta(A)=P_{\vartheta,e}(X_1\in A)$

$= \int 1_{\{X_1\in A\}}\cdot L[(e,1),\vartheta]\,dP_{\vartheta,e}$ (wegen (B1))

$= \int 1_{\{X_1\in A\}}\cdot k[(X_1,1),\vartheta]\,dP_{\vartheta,e}$ (wegen (B2))

$= \int 1_A\, k[(.,1),\vartheta]\,d\mu_{\vartheta_0}$, also dominiert μ_{ϑ_0} die Familie $(\mu_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta}$.

Wegen Satz 3.4 und Bedingung (B3) gilt dann: Die Funktionen $k[.,\vartheta]$ sind extremal und nach (B4) Exponentiale auf $G \times \mathbb{N}_0$, also nach 2.13 von der Form $(x,n)\longrightarrow k[(x,n),\vartheta] = \varphi_\vartheta(x)\cdot\langle\varphi_\vartheta,\mu_{\vartheta_0}\rangle^{-n}$ für $(x,n)\in G\times\mathbb{N}_0$, wobei φ_ϑ Exponential auf G ist. Also bilden die $(\mu_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta}$ eine Exponentialfamilie mit Dichten $x\longrightarrow\varphi_\vartheta(x)\cdot\langle\varphi_\vartheta,\mu_{\vartheta_0}\rangle^{-1}$ bezgl. μ_{ϑ_0}. ⌟

3.25 Bemerkung

1.) In Folgerung 3.24 genügt es in Bedingung (B2) die Harmonizität der Funktion $k[.,\vartheta]$ in den Punkten $(x,n)\in G\times\mathbb{N}_0$ mit $k[(x,0),\vartheta]=0$ zu fordern, denn aus (B1) folgt:
Ist für $x\in G$ $k[(x,0),\vartheta]>0$, so ist für $m\in\mathbb{N}_0$ $k[.,\vartheta]$ harmonisch in jedem Punkt (x,m).

Beweis:

Für $(x,m)\in G\times\mathbb{N}_0$, $n\in\mathbb{N}_0$ und $F\in\mathfrak{F}_{n+m}$ ist

$$\int_F k[(x,n+m),\vartheta]\,dP_{\vartheta_\bullet,x}=\int_F k[(x,n+m+1),\vartheta]\,dP_{\vartheta_\bullet,x},\ \text{also nach (B2)}$$

$$\int_F k[(X_{n+m},n+m),\vartheta]\,dP_{\vartheta_\bullet,x}=\int_F k[(X_{n+m+1},n+m+1),\vartheta]\,dP_{\vartheta_\bullet,x}$$

für $x\in G$ mit $k[(x,0),\vartheta]>0$, d.h. aber $(k[(X_{n+m},n+m),\vartheta])_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist Martingal bezgl. $P_{\vartheta_\bullet,x}$. Dann ist nach 1.6.4 $k[.,\vartheta]$ harmonisch in $(x,m)\in G\times\mathbb{N}_0$, falls $k[(x,0),\vartheta]>0$.

2.) Fordert man also in Bedingung (B2) die Existenz einer strikt positiven Funktion $k[.,\vartheta]$, so ist diese Funktion nach Teil 1.) bereits überall harmonisch.

Lemma 3.2 und Folgerung 3.24 kann man für Gruppen zusammenfassen zu

3.26 Folgerung

Eine Familie von W-Maßen $(\mu_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta}$ auf der Gruppe G erfülle die Bedingung (B3) und für ein ausgezeichnetes $\vartheta_\bullet\in\Theta$ die modifizierte Bedingung:

(B4') Stetige, extremale Funktionen für die R-Z-Kette zur Irrfahrt mit Verteilung $\mu_{\vartheta_\bullet}$ sind bereits Exponentiale auf $G\times\mathbb{N}_0$.

Dann sind äquivalent:

a) (B1) und (B2) sind erfüllt, wobei die dort auftretende Funktionen $k[.,\vartheta]$ für jedes $\vartheta\in\Theta$ stetig sind.

b) Die $(\mu_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta}$ bilden eine Exponentialfamilie (zu $\mu_{\vartheta_\bullet}$) mit Dichten der Form $x\longrightarrow\xi_\vartheta(x)\cdot Z(\vartheta)$ bezgl. $\mu_{\vartheta_\bullet}$, wobei ξ_ϑ Exponential auf G und $Z(\vartheta)$ Normierungskonstante ist.

Beweis:

a) $\rightarrow$ b): Dies ist der Inhalt der Folgerung 3.24.

b) $\rightarrow$ a): Dies ist die Aussage des Lemmas 3.2, wenn man zusätzlich beachtet, daß $k[.,\vartheta]$ stetig ist, weil ϑ als Exponential der Gruppe G stetig ist.

Die Beantwortung der Frage, wann Bedingung (B4') gilt, erfolgt nach einem vorbereitenden Lemma.

3.27 Lemma

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Irrfahrt auf der Gruppe G mit Faltungskern Q zum W-Maß μ auf der σ-Algebra der Borelmengen $\mathfrak{B}$. Dann gilt:

1.) Ist h R-Z-harmonisch, so ist für jede Menge A die Funktion h_A mit $h_A(x,n) := \int_A h(x\circ y, n+1)\,\mu(dy)$ für $(x,n)\in G\times\mathbb{N}_0$ ebenfalls harmonisch.

2.) Ist h extremal für die R-Z-Kette, so ist für jedes $(w,k)\in G\times\mathbb{N}_0$ auch die translatierte Funktion $h_{w,k}$ mit $h_{w,k}(x,n) := h(w\circ x, k+n)$ für $(x,n)\in G\times\mathbb{N}_0$ extremal.

3.) Ist h extremal für die R-Z-Kette mit $h(e,0)=1$, so ist für jedes $(y,m)\in G\times\mathbb{N}_0$

$h(y,m) = \lim_{j\to\infty} \int_{H(\tilde{\mu})} h\, d\tilde{Q}^j[(y,m),.]$, wobei $H(\tilde{\mu})$ die kleinste abgeschlossene Halbgruppe oberhalb des Trägers von $\tilde{\mu} = \mu\otimes\varepsilon_1$ und $\tilde{Q}$ der R-Z-Übergangskern zu Q ist.

Beweis:

zu 1.): h_A ist harmonisch, denn für $(x,n)\in G\times\mathbb{N}_0$ ist

$\int h_A(x\circ y, n+1)\,\mu(dy) = \int_A \int h(x\circ y\circ z, n+2)\,\mu(dy)\,\mu(dz)$

$= \int_A h(x\circ y, n+1)\,\mu(dy) = h_A(x,n).$

zu 2.) Sei g eine R-Z-harmonische Funktion mit $g \leq h_{w,k}$.

Da für $(x,n)\in G\times\mathbb{N}_0$ $\int g(x\circ w^{-1}\circ z, n)\,\mu^k(dz) \leq \int h(x\circ z, n+k)\,\mu^k(dz)$ $= h(x,n) < \infty$, kann man eine neue Funktion $\tilde{g}$ auf $G\times\mathbb{N}_0$

durch $\tilde{g}(x,n) := \int g(x \cdot w^{-1} \cdot z, n)\, \mu^k(dz)$ definieren. Man sieht leicht, daß g R-Z-harmonisch ist. Wegen $\tilde{g} \leq h$ ist $\tilde{g}$ bereits proportional zu h, d.h. es existiert ein $t \in [0,1]$ mit $\tilde{g} = t \cdot h$. Dann gilt aber für $(x,n) \in G \times \mathbb{N}_0$:

$g(x,n) = \int g(x \cdot z, n+k)\, \mu^k(dz) = \int g(w \cdot x \cdot w^{-1} \cdot z, n+k)\, \mu^k(dz)$
$= g(w \cdot x, n+k) = t \cdot h(w \cdot x, n+k) = t \cdot h_{w,k}(x,n)$, also ist $h_{w,k}$ extremal.

zu 3.): Sei $\tilde{Q}^h$ der Q^h-Kern der h-Kette. Für $(y,m) \in H(\tilde{\mu}) \cap \{h > 0\}$ ist $\tilde{Q}^h[(y,m), H(\tilde{\mu})] = h(y,m)^{-1} \int 1_{H(\tilde{\mu})}\, h\, d\tilde{Q}[(y,m),.] = 1$, da die R-Z-Kette sich bei Start in $H(\tilde{\mu})$ mit Wkt. 1 weiter in $H(\tilde{\mu})$ aufhält, also ist $\tilde{Q}^h 1_{CH(\tilde{\mu})} \leq 1_{CH(\tilde{\mu})}$.

Damit existiert $\lim_{l \to \infty} (\tilde{Q}^h)^l 1_{CH(\tilde{\mu})}$ als Limes einer antitonen Folge, ist $\tilde{Q}^h$-harmonisch und natürlich durch 1 beschränkt. Da h $\tilde{Q}$-extremal ist, ist nach 1.6.5 $1_{\{h>0\}}$ $\tilde{Q}^h$-extremal, also existiert eine Konstante c mit $\lim_{l \to \infty} (\tilde{Q}^h)^l 1_{CH(\tilde{\mu})} = c$ auf $\{h > 0\}$. Auswertung im Punkt $(e,0) \in H(\tilde{\mu}) \cap \{h > 0\}$ liefert c=0. Das heißt aber für $(y,m) \in \{h > 0\}$

$h(y,m) = \lim_{l \to \infty} \int_{H(\tilde{\mu})} h\, d\tilde{Q}^l[(y,m),.]$, und für $(y,m) \in \{h=0\}$ stimmt die Gleichung sowieso. ⌟

3.28 Satz

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ Irrfahrt mit Verteilung μ auf der Gruppe G. Ist dann die Funktion h stetig und extremal für die R-Z-Kette und ist h(e,0)=1, dann ist h Exponential auf $G \times \mathbb{N}_0$, d.h. Bedingung (B4') ist erfüllt.

Beweis:

Für jede Menge A aus der σ-Algebra $\mathcal{G}$ der Borelmengen in G ist die Funktion h_A mit $h_A(x,n) := \int_A h(x \cdot y, n+1)\, \mu(dy)$ für $(x,n) \in G \times \mathbb{N}_0$ nach 3.27.1 ebenfalls R-Z-harmonisch. Da außerdem $0 \leq h_A \leq h$ gilt und h extremal ist, existiert also ein $t_A \in [0,1]$ mit $t_A \cdot h = h_A$ auf $G \times \mathbb{N}_0$. Wegen h(e,0)=1 erhält man $t_A = h_A(e,0)$, also für alle $(x,n) \in G \times \mathbb{N}_0$

$h_A(e,0)\cdot h(x,n)=h_A(x,n)$, d.h. für alle $A\in\mathfrak{A}$

$\int_A h(y,1)\cdot h(x,n)\,\mu(dy) = \int_A h(x\circ y,n+1)\,\mu(dy)$. Dann ist aber für jedes $(x,n)\in G\times\mathbb{N}_0$ $h(y,1)\cdot h(x,n) = h(x\circ y,n+1)$ für μ-fast alle $y\in G$. Definiert man

$A:=\{(y,m)\in G\times\mathbb{N}_0 \mid h(x,n)\cdot h(y,m)=h(x\circ y,n+m)\ \forall (x,n)\in G\times\mathbb{N}_0\}$,

so gilt: A ist abgeschlossen (da h stetig ist), A ist Halbgruppe, und A umfaßt den Träger von $\tilde{\mu}$, also insgesamt $A\supset H(\tilde{\mu})$. Dann ist h bereits Exponential auf ganz $G\times\mathbb{N}_0$, denn es gilt nach 3.27.3 für $(x,n)\in G\times\mathbb{N}_0$ und $(y,m)\in G\times\mathbb{N}_0$

$h(x,n)\cdot h(y,m) = h(x,n)\cdot \lim_{l\to\infty} \int_{H(\tilde{\mu})} h\, d\tilde{Q}^l[(y,m),.]$

$= \lim_{l\to\infty} \int_{H(\tilde{\mu})} h_{x,n}\, d\tilde{Q}^l[(y,m),.] = h_{x,n}(y,m)=h(x\circ y,n+m)$, da nach 3.27.2 mit h auch $h_{x,n}$ extremal ist. ⌟

Damit läßt sich die Aussage von Folgerung 3.26 wie folgt vereinfachen:

3.29 Folgerung

Eine Familie von W-Maßen $(\mu_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta}$ auf der Gruppe G erfülle die Bedingung (B3). Dann sind äquivalent:

a) (B1) ist erfüllt, und $\mathfrak{A}(X_n)$ ist für jedes $n\in\mathbb{N}_0$ $\mathfrak{F}_x=\{P_{\vartheta,x} \mid \vartheta\in\Theta\}$ erschöpfend auf $\mathfrak{F}_n$, wobei in den dort auftretenden Dichtefunktionen die $k[(.,1),\vartheta]$ stetig und strikt positiv sind.

b) Die $(\mu_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta}$ bilden eine Exponentialfamilie (zu μ_{ϑ_0}).

Beweis:

a)⇒b): Nach 3.25.2 und 3.3.2 ist (B2) erfüllt.

b)⇒a): Da Exponentiale auf Gruppen strikt positiv sind, sind auch die $k[.,\vartheta]$ strikt positiv.

3.30 Korollar

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Irrfahrt mit Verteilung μ auf der Gruppe G, so daß Bedingung (GT) erfüllt und μ ausgebreitet ist. Dann sind stetige, extremale Funktionen h für die Raum-Zeit-Kette mit $h(e,0)=1$ genau die harmonischen Funktionen h mit $h(x,n)=\xi(x)\cdot Z^n$ für $(x,n)\in G\times\mathbb{N}_0$, wobei ξ Exponential von G und Z Normierungskonstante ist.

Beweis:

Die harmonischen Exponentiale auf $G\times\mathbb{N}_0$ sind nach Satz 3.4 extremal, da nach Satz 3.20 Bedingung (B3) erfüllt ist, und stetig, da Exponentiale der Gruppe G stetig sind. Ist umgekehrt h stetig und extremal mit $h(e,0)=1$, dann ist nach Satz 3.28 h Exponential auf $G\times\mathbb{N}_0$, nach 2.13.2 also von der angegebenen Form.

Korollar 3.30 ist im allgemeinen falsch für Halbgruppen. Das zeigt folgendes

3.31 Beispiel

Sei für $a_0>0$ H die Halbgruppe $[0,a_0]$ mit der Verknüpfung $x\cdot y:=x\vee y$ für $x,y\in H$ (siehe auch 3.23). $\mu=\frac{1}{a_0}\cdot 1_{[0,a_0]}$ sei die Gleichverteilung über H. Nach 2.14.4 b) sind Exponentiale auf H genau die Funktionen $1_{[0,a]}$ mit $a\in[0,a_0]$ und $1_{[0,a)}$ mit $a\in(0,a_0]$, also sind harmonische Exponentiale auf $H\times\mathbb{N}_0$ nach 2.13.2 genau die Funktionen h_a und k_a für $a>0$ mit $h_a(x,n)=1_{[0,a]}(x)\cdot Z(a)^n$ und $k_a(x,n)=1_{[0,a)}(x)\cdot Z(a)^n$ für $(x,n)\in H\times\mathbb{N}_0$, wobei sich die Normierungskonstante Z(a) aus der Harmonizitätsbedingung ergibt: $Z(a)=\langle 1_{[0,a]},\mu\rangle^{-1}=\frac{a_0}{a}$. Da offensichtlich $k_a\lneq h_a$ ist mit $k_a(a,0)=0<h_a(a,0)=1$, aber $t\cdot h_a\equiv k_a$ für kein $t\in[0,1]$ gilt, sind die h_a (überabzählbar viele) nicht stetige, nicht extremale Funktionen.

Die Funktionen k_a sind extremal. Dazu genügt es zu zeigen: Die beschränkten, harmonischen Funktionen für die k_a-Kette sind konstant auf $\{k_a > 0\} = [0,a) \times \mathbb{N}_0$. Diese Markoffkette ist R-Z-Kette zur Irrfahrt mit Verteilung $\mu_a := k_a(.,1)\mu = \frac{1}{a} \cdot 1_{[0,a)}\lambda$. Für diese Kette sind nach dem Satz von Choquet-Deny und einer Beispiel 3.22.2 analogen Argumentation harmonische, beschränkte Funktionen konstant auf $[0,a) \times \mathbb{N}_0$. Für $a > 0$ sind die Differenzen $h_a - k_a$ mit $(h_a - k_a)(x,n) = 1_{\{a\}}(x) \cdot (\frac{a_0}{a})^n$ ebenfalls harmonisch und, wie man leicht sieht, extremal.

Im Rest des Kapitels führen wir Beispiele an, in denen die entsprechenden Voraussetzungen erfüllt sind, so daß man die extremalen Funktionen für die Raum-Zeit-Kette explizit angeben kann.

3.32 Exponentialfamilien auf $(\mathbb{Z},+)$ bzw. $(\mathbb{N}_0,+)$

Nach 2.12.1 bzw. 2.12.2 sind Exponentiale genau die Funktionen h_a mit $h_a(x) := a^x$ mit $a > 0$ für $(\mathbb{Z},+)$ bzw. $a \geq 0$ für $(\mathbb{N}_0,+)$. Zu vorgegebenem W-Maß μ auf der Gruppe $(\mathbb{Z},+)$ mit der Bedingung (GT) bzw. auf der Halbgruppe $(\mathbb{N}_0,+)$ mit Bedingung (HT) erhält man die Exponentialfamilie (μ_a), wobei die μ_a bezgl. μ Dichten von der Gestalt $x \to a^x \cdot Z(a)$ mit einer Normierungskonstanten $Z(a)$ besitzen. Hierbei ist $Z(a) = \langle h_a, \mu \rangle^{-1}$. Die Funktionen k_a mit $k_a(x,n) := a^x \cdot Z(a)^n$ sind extremal für die R-Z-Kette auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0$ für $a > 0$ bzw. auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ für $a \geq 0$.

Die Bedingung (GT) ist hierbei genau dann erfüllt, wenn die Menge $\{a-b \mid a,b \in T(\mu)\}$ teilerfremd ist.

1. Poisson-Verteilungen

Sei für $x \in \mathbb{N}_0$ $\mu(x) := \frac{1}{x!} \cdot e^{-1}$. Der Träger von μ ist dann $\mathbb{N}_0$. $G(\tilde{\mu}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und $H(\tilde{\mu}) = (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}) \cup \{0\}$, also sind (GT) bzw. (HT) erfüllt.

$Z(a)^{-1} = \sum_{x=0} a^x \mu(x) = \sum_{x=0} a^x/x! \cdot e^{-1} = e^{a-1}$. Als Exponentialfamilie ergibt sich $(\mu_a)_{a>0}$ auf $\mathbb{Z}$ bzw. $(\mu_a)_{a\geq 0}$ auf $\mathbb{N}_0$ mit $\mu_a(x) = a^x \cdot e^{1-a} \cdot \mu(x) = a^x/x! \cdot e^{-a}$, also wieder Poisson-Verteilungen mit Parameter $a>0$ bzw. $a\geq 0$. Die Funktionen k_a mit $k_a(x,n) := a^x \cdot e^{(1-a)n}$ mit $a>0$ (bzw. $a\geq 0$) sind extremal auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0$ (bzw. auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$). Die Funktion k_0 mit $k_0(x,n) = 0^x e^n = \begin{cases} e^n & \text{für } x=0 \text{ und} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ist für die Raum-Zeit-Kette auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0$ nicht einmal harmonisch.

2. Geometrische Verteilungen

Sei für $x \in \mathbb{N}_0$ $\mu(x) := (\frac{1}{2})^{x+1}$. Der Träger von μ ist dann $\mathbb{N}_0$, also sind (GT) bzw. (HT) erfüllt.

$$Z(a)^{-1} = \sum_{x=0} a^x \mu(x) = \sum_{x=0} a^x \cdot (\tfrac{1}{2})^{x+1} = \tfrac{1}{2} \cdot (1-\tfrac{a}{2})^{-1} = (2-a)^{-1}$$

für $a \in (0,2)$ bzw. $a \in [0,2)$. Als Exponentialfamilie erhalten wir (μ_a) mit $\mu_a(x) = a^x \cdot (2-a) \cdot (\frac{1}{2})^{x+1} = (\frac{a}{2})^x (1-\frac{a}{2})$, also wieder geometrische Verteilungen mit Parameter $1-\frac{a}{2}$. Die Funktionen k_a mit $k_a(x,n) := a^x (2-a)^n$ mit $a \in (0,2)$ bzw. $a \in [0,2)$ sind extremal auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0$ bzw. auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

Für $a := 2(1-p)$ mit $p \in (0,1]$ ergeben sich gerade die geometrischen Verteilungen mit Parameter p.

3. Binomial - Verteilungen

Diese sind bereits im Beispiel 3.12.1 behandelt worden.

3.33 Multinomial - Verteilungen auf $\mathbb{Z}^d$ $(d \in \mathbb{N})$

Sei für $x = (x_1, .., x_d) \in \mathbb{N}_0^d$ mit $\sum_{j=1}^{d} x_j = m$ $(m \in \mathbb{N})$

$$\mu(x) := \frac{m!}{x_1! \cdot .. \cdot x_d!} \; d^{-m}.$$

$G := \{(x_1, .., x_d) \in \mathbb{Z}^d \mid \sum_{j=1}^{d} x_j = k \cdot m \text{ mit } k \in \mathbb{Z}\}$ ist Gruppe mit $G(\tilde{\mu}) = G \times \mathbb{Z}$, also ist (GT) erfüllt.

Für $a=(a_1,..,a_d)\in \mathbb{R}^d$ mit $a_i > 0$ für alle $i=1,..,d$
sind dann nach 2.13.3 und 3.30 Extremale genau von der Form:

$$(x_1,..,x_d,n) \to \prod_{j=1}^{d} a_j^{x_j} \cdot Z(a)^n = \prod_{j=1}^{d} a_j^{x_j} \cdot [d\cdot(\sum_{i=1}^{d} a_i)^{-1}]^{m\cdot n}, \text{ da}$$

$$Z(a)^{-1} = \sum_{x\in T(\mu)} \frac{m}{x_1!\cdot..\cdot x_d!} \cdot d^{-m} \prod_{j=1}^{d} a_j^{x_j} = d^{-m}(\sum_{j=1}^{d} a_j)^m \text{ ist.}$$

Als Exponentialfamilie ergibt sich

$$\mu_a(x_1,..,x_d) = \frac{m!}{x_1!\cdot..\cdot x_d!} \cdot d^{-m} \prod_{j=1}^{d} a_j^{x_j} [d\cdot(\sum_{i=1}^{d} a_i)^{-1}]^m$$

$$= \frac{m!}{x_1!\cdot..\cdot x_d!} \prod_{j=1}^{d} [a_j / \sum_{i=1}^{d} a_i]^{x_j}, \text{ also Multinomial - Verteilungen}$$

mit Parameter $p_j := a_j / \sum_{i=1}^{d} a_i$ $(j=1,..,d)$.

3.34 Exponentialfamilien auf endlichen (Halb-)Gruppen

1.) Ist $(G,\cdot)$ endliche Gruppe mit diskreter Topolgie,
so ist nach 2.15.2 a) das Zählmaß τ ein Haarmaß.
Ist h Exponential von G, so gilt
$\infty > \langle h,\tau\rangle = \int h(x\cdot y)\,\tau(dy) = h(x)\langle h,\tau\rangle$ für jedes $x\in G$.
Gäbe es ein $x\in G$ mit $h(x)\neq 1$, so wäre $\langle h,\tau\rangle = 0$ und
damit $h\equiv 0$. Also ist insgesamt $h\equiv 1$.
Ist jetzt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Irrfahrt mit Verteilung μ auf G
und ist (GT) erfüllt, so existieren für die R-Z-Kette
auf $G\times\mathbb{N}_0$ keine extremalen harmonischen Funktionen
außer der Konstanten 1. Diese wären nämlich nach 3.30
von der Form $k_a(x,n)=a^n$ mit $a>0$ für $(x,n)\in G\times\mathbb{N}_0$.
Aus der Harmonizitätsbedingung $k_a(x,n)=a^n=\int k_a(x\cdot y,n+1)\,\mu(dy)$
$=a^{n+1}$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$ folgt $a=1$, also $k_a\equiv 1$.

2.) Diese Aussage ist im allgemeinen falsch für
endliche Halbgruppen. Dies zeigt das Beispiel
$H:=\{1,..,m_o\}$ mit $m_o\in\mathbb{N}$ mit der üblichen Ordnungsrelation
und der diskreten Topologie (siehe auch 2.14.4 c)).
Ist μ die Laplace-Verteilung über H, so ist $H(\tilde{\mu}) = (H\times\mathbb{N})\cup\{0\}$,

also (HT) erfüllt. Exponentiale von H sind genau die Funktionen $1_{\{1,..,m\}}$ mit $m \in H$. Für die Exponentialfamilie $(\mu_m)_{m\in H}$ gilt $\mu_m(x)=1_{\{1,..,m\}}(x)\cdot Z(m)\cdot\frac{1}{m_o}$ für $x\in H$ mit $Z(m)^{-1}=\sum_{x\in H} 1_{\{1,..,m\}}(x)\cdot\frac{1}{m_o}=\frac{m}{m_o}$. μ_m ist also Laplace-Verteilung über $\{1,..,m\}$. Als extremale harmonische Funktionen erhält man k_m mit $k_m(x,n)=1_{\{1,..,m\}}(x)\cdot(\frac{m_o}{m})^n$ für $(x,n)\in H\times\mathbb{N}_o$.

3.35 Exponentialfamilien auf $(\mathbb{R}^d,+)$ $(d\in\mathbb{N})$

1.) Sei μ ein W-Maß auf den Borelmengen des $\mathbb{R}^d$, welches ausgebreitet bezgl. des Lebesgue-Borel-Maßes λ^d ist und $G(\tilde{\mu})=\mathbb{R}^d\times\mathbb{Z}$ erfüllt. Stetige, extremale Funktionen sind nach 3.30 für $a=(a_1,..,a_d)\in\mathbb{R}^d$ genau die Funktionen

$$k_a:(x,n)\longrightarrow\prod_{i=1}^{d} e^{a_i x_i}\cdot Z(a)^n \text{ mit } Z(a)^{-1}=\int\prod_{i=1}^{d} e^{a_i x_i}\,d\mu(x_1,..,x_d).$$

Als Exponentialfamilie (zu μ) ergibt sich $\mu_a=k_a(.,1)\mu$.

2.) Exponential-Verteilungen

Besitzt μ die Dichte f bezgl. des Lebesgue-Borel-Maßes λ^1 mit $f(x):=e^{-x}\cdot 1_{[0,\infty)}(x)$ für $x\in\mathbb{R}$, so ist μ ausgebreitet und (GT) erfüllt. Wegen

$$Z(a)^{-1}=\int e^{ax}\cdot e^{-x}\cdot 1_{[0,\infty)}(x)\,\lambda(dx)=\int_0^\infty e^{x(a-1)}dx=(1-a)^{-1}$$

für $a\in(-\infty,1)$ sind stetige, extremale Funktionen auf $\mathbb{R}\times\mathbb{N}_o$ genau die k_a mit $k_a(x,n)=e^{ax}(1-a)^n$. Die Elemente μ_a der Exponentialfamilie besitzen Dichten f_a bezgl. λ mit $f_a(x)=k_a(x,1)f(x)=e^{ax}(1-a)e^{-x}\,1_{[0,\infty)}(x)$
$=(1-a)e^{-x(1-a)}\,1_{[0,\infty)}(x)$. μ_a ist also Exponential-Verteilung mit Parameter $1-a$ $(a<1)$.

3.) Normalverteilungen im $\mathbb{R}^d$

Sei $\mu = f \lambda^d$ mit $f(x_1,..,x_d) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \exp(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} x_i^2)$

Wegen $\int_{\mathbb{R}^d} \exp(\sum_{i=1}^{d} a_i x_i) \cdot (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \exp(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} x_i^2)\, d\lambda^d(x_1,..,x_d)$

$= \int_{\mathbb{R}^d} \exp[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} (x_i - a_i)^2] \cdot (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \cdot \exp(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} a_i^2) d\lambda^d(x_1,..,x_d)$

$= \exp(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} a_i^2) = Z(a)^{-1}$ sind für $a=(a_1,..,a_d) \in \mathbb{R}^d$ stetige Extremale genau die Funktionen

$$(x_1,..,x_d,n) \longrightarrow \exp(\sum_{i=1}^{d} a_i x_i) \cdot Z(a)^n = \exp[\sum_{i=1}^{d} (a_i x_i - \frac{n}{2} \cdot a_i^2)].$$

Als Elemente der Exponentialfamilie erhalten wir $\mu_a = f_a \lambda^d$ mit

$$f_a(x_1,..,x_d) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \cdot \exp(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} x_i^2) \cdot \exp[\sum_{i=1}^{d} (a_i x_i - \frac{a_i^2}{2})]$$

$$= (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \cdot \exp[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} (x_i - a_i)^2] .$$

Die μ_a sind also d-dimensionale Normalverteilungen mit Erwartungswert $a=(a_1,..,a_d)$ und der Einheitsmatrix als Covarianzmatrix.

Im obigen Beispiel erhält man auf $(\mathbb{R}^d,+)$ zur standardisierten Normalverteilung als Exponentialfamilie wieder Normalverteilungen mit beliebigem Erwartungswert. Versieht man $\mathbb{R}$ (oder allgemeiner $\mathbb{R}^d$ mit $d \geq 1$) dagegen mit einer geeigneten Halbgruppenstruktur, so kann man genau die Normalverteilungen mit Erwartungswert 0 und beliebiger Varianz als Elemente einer Exponentialfamilie darstellen. Dies zeigt das folgende Beispiel.

3.36 Beispiel

Definiert man für $x,y \in \mathbb{R}$ $x \cdot y := \sqrt{x^2+y^2}$, so ist $(\mathbb{R},\cdot)$ Halbgruppe, die mit der üblichen Topologie verträglich ist. Für $\vartheta \in \mathbb{R}$ sind die Funktionen ξ_ϑ mit $\xi_\vartheta(x) := \exp(\vartheta \cdot x^2)$ $(x \in \mathbb{R})$ Exponentiale von $(\mathbb{R},\cdot)$, denn für $x,y \in \mathbb{R}$ ist $\xi_\vartheta(x \cdot y) = \exp[\vartheta(x \cdot y)^2]$ $= \exp[\vartheta(x^2+y^2)] = \exp(\vartheta x^2) \cdot \exp(\vartheta y^2) = \xi_\vartheta(x) \cdot \xi_\vartheta(y)$. Sei μ die standardisierte Normalverteilung, also $\mu = f\lambda$ mit $f(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{1}{2} x^2)$ $(x \in \mathbb{R})$. Die Elemente der zugehörigen Exponentialfamilie besitzen dann jeweils Dichten f_ϑ (bezgl. λ) der Gestalt

$$f_\vartheta(x) = \xi_\vartheta(x) \cdot Z(\vartheta) \cdot f(x) = Z(\vartheta)\,(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp[x^2(\vartheta - \tfrac{1}{2})] \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Es ist also $Z(\vartheta) = \sqrt{1-2\vartheta}$ für $\vartheta < \frac{1}{2}$ (für $\vartheta \geq \frac{1}{2}$ ist $f_\vartheta \cdot f$ nicht integrierbar). Man erhält als Elemente der Exponentialfamilie Normalverteilungen mit Erwartungswert 0 und Varianz $(1-2\vartheta)^{-1}$.

Die Funktionen k_ϑ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{N}_0$ mit

$$k_\vartheta(x,n) := \xi_\vartheta(x) \cdot Z(\vartheta)^n = \exp(\vartheta x^2) \cdot (1-2\vartheta)^{\frac{n}{2}}$$ sind

sogar extremale, harmonische Funktionen für die R-Z-Kette zur Irrfahrt mit Verteilung μ. Dazu genügt es, Bedingung (B3) nachzuweisen. Sei also für $\vartheta < \frac{1}{2}$ k eine bezgl. der Raum-Zeit-Kette zur Irrfahrt mit Verteilung $f_\vartheta \lambda = f_\vartheta \cdot Z(\vartheta)\mu$ harmonische, beschränkte Funktion. Dann gilt für $(x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}_0$:

$$k(x,n) = \int k(\sqrt{x^2+y^2}, n+1) \cdot f_\vartheta(y)\, \lambda(dy)$$

$$= \int 1_{(x^2,\infty)}(y) \cdot k(\sqrt{y}, n+1) \cdot f_\vartheta(\sqrt{y-x^2})\,(y-x^2)^{-\frac{1}{2}}\, \lambda(dy).$$

Sei jetzt $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}$ mit $x_m \xrightarrow[m \to \infty]{} x$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert dann ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $m \geq m_0$ $x_m^2 \in (x^2-\varepsilon, x^2+\varepsilon)$ ist. Spaltet man das Integral

$$\int_{x_m^2}^{\infty} k(\sqrt{y}, n+1) \cdot f_\vartheta(\sqrt{y-x_m^2}) \cdot (y-x_m^2)^{-\frac{1}{2}}\, dy, \text{ also } k(x_m,n),$$

auf in ein Integral über $(x_m^2, x^2+\varepsilon)$ und ein Integral über $[x^2+\varepsilon, \infty)$, so gilt:

Das erste Integral wird beliebig klein wegen

$$\int_{x_m^2}^{x^2+\varepsilon} f_\vartheta(\sqrt{y-x_m^2})(y-x_m^2)^{-\frac{1}{2}}dy = 2\int_0^{\sqrt{x^2-x_m^2+\varepsilon}} f_\vartheta(y)dy \leq 2\int_0^{\sqrt{2\varepsilon}} f_\vartheta(y)dy.$$

Das zweite Integral konvergiert nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz für $m\to\infty$ gegen

$$\int_{x^2+\varepsilon}^{\infty} k(\sqrt{y},n+1)f_\vartheta(\sqrt{y-x^2})(y-x^2)^{-\frac{1}{2}}dy = \int_{\sqrt{2}\varepsilon}^{\infty} k(\sqrt{x^2+y^2},n+1)f_\vartheta(y)dy,$$

läßt sich also $k(x,n)$ beliebig annähern (eine integrierbare Majorante ist $y\longrightarrow C\cdot\exp(y-x^2+\varepsilon)\cdot(y-x^2-\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}$ für eine Konstante $C\in\mathbb{R}_+$).

Insgesamt ist also k stetig. Dann liefert Folgerung 3.10 sofort die Konstanz der Funktion k, da wegen $H(f_\vartheta\lambda\otimes\varepsilon_1) = (\mathbb{R}\times\mathbb{N})\cup\{0\}$ für jedes $\vartheta < \frac{1}{2}$ (HT) erfüllt ist.

IV. MARKOFF-FELDER

In diesem Kapitel werden die im vorigen Abschnitt angeführten Ergebnisse auf Markoff-Felder angewandt. Dabei werden Markoff-Felder mit Parameterraum $\mathbb{N}_0$ als Raum-Zeit-Irrfahrten zu Exponentialfamilien identifiziert. Außerdem werden Resultate dargestellt, die ihr Analogon in der bereits ausgiebig untersuchten Situation des Parameterraums $\mathbb{Z}$ finden.
Die Begriffsbildung orientiert sich an den Ausführungen von D.Griffeath (in KEMENY-SNELL-KNAPP[16], XII. Introduction to Random Fields). Im Gegensatz zu Griffeath werden wir allerdings nicht verlangen, daß stets strikt positive Zylinderwahrscheinlichkeiten vorliegen.
Der Begriff Markoff-Feld wird zunächst unabhängig von (Halb-)Gruppenstrukturen eingeführt.

4.1 Definition

Sei T eine abzählbare Menge. Ein System $N = \{ N(a) \mid a \in T \}$ heißt Nachbarschaftssystem auf T, falls
a) $N(a) \in \mathfrak{P}(T)$,
b) $a \notin N(a)$ und
c) $a \in N(b) \Leftrightarrow b \in N(a)$ für alle $a,b \in T$ gilt.

Wir definieren $\bar{a} := N(a) \cup \{a\}$. Die Elemente von N(a) heißen auch die Nachbarn von a.

4.2 Beispiele

1) Ist $T = \mathbb{N}_0^d$ mit $d \in \mathbb{N}$, so liefert für $a \in \mathbb{N}_0^d$
$N(a) := \{ b \in \mathbb{N}_0^d \mid |a-b| = 1 \}$ ein Nachbarschaftssystem auf $\mathbb{N}_0^d$.
2) Speziell für d=1 ergibt sich $N(n) = \{n-1, n+1\}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $N(0) = \{1\}$.
3) Ist $T = \mathbb{Z}^d$ mit $d \in \mathbb{N}$, so liefert für $a \in \mathbb{Z}^d$
$N(a) := \{ b \in \mathbb{Z}^d \mid |a-b| = 1 \}$ ein Nachbarschaftssystem auf $\mathbb{Z}^d$.
4) Für eine beliebige Menge T wird durch $N(A) := \emptyset$ für alle $a \in T$ ein Nachbarschaftssystem, das sogenannte "triviale Nachbarschaftssystem", definiert. Es gilt dann $\bar{a} = \{a\}$ für alle $a \in T$.

4.3 Cliquen

Sei T eine abzählbare Menge mit einem Nachbarschaftssystem N. Eine nicht leere Teilmenge C von T heißt Clique, falls für $a,b \in C$ mit $a \neq b$ bereits $a \in N(b)$ gilt, d.h. je zwei verschiedene Elemente von C sind bereits Nachbarn.
Einelementige Mengen sind also stets Cliquen.
$\mathcal{C}$ sei die Menge der Cliquen.

4.4 Beispiele

1) Für $T=\mathbb{N}_0^d$ $(d \in \mathbb{N})$ mit dem Nachbarschaftssystem aus 4.2.1 ist $\mathcal{C} = \{ \{a\}, \{a,b\} \mid a,b \in \mathbb{N}_0^d \text{ mit } |a-b|=1 \}$.

2) Für $T=\mathbb{N}_0$ mit dem Nachbarschaftssystem aus 4.2.2 ist $\mathcal{C} = \{ \{n\}, \{n,n+1\} \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$.

3) Für $T=\mathbb{Z}^d$ $(d \in \mathbb{N})$ mit dem Nachbarschaftssystem aus 4.2.3 ist $\mathcal{C} = \{ \{a\}, \{a,b\} \mid a,b \in \mathbb{Z}^d \text{ mit } |a-b|=1 \}$.

4) Für das triviale Nachbarschaftssystem aus 4.2.4 sind die einelementigen Mengen die einzigen Cliquen.

4.5 Definition

E und T seien abzählbare Mengen, $\mathfrak{S}$-Algebra auf E sei die Potenzmenge $\mathcal{E} = \mathfrak{P}(E)$ und N ein Nachbarschaftssystem auf T. Ω sei der Produktraum E^T. E heißt auch Zustandsraum, T Parameterraum. $X_t : \Omega \longrightarrow E$ seien für $t \in T$ die Projektionen, $\mathcal{F} := \mathfrak{A}(X_t, t \in T)$.
Ein Maß P auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit $P(X_t=a) < \infty$ für alle $t \in T$ und $a \in E$ heißt Markoff-Feld (bezgl. N) auf Ω, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

(M.F.) Für alle $a \in T$ und alle endlichen Teilmengen Λ von T mit $\Lambda \supset N(a) \cup \{a\}$ gilt:

$$P[X_a = \omega_a \mid X_t = \omega_t \ \forall\, t \in \Lambda \setminus \{a\}] = P[X_a = \omega_a \mid X_t = \omega_t \ \forall\, t \in N(a)]$$

für alle $\omega = (\omega_t)_{t \in T}$, für die beide Seiten definiert sind, d.h. für die gilt:

$$P[X_t = \omega_t \ \forall\, t \in \Lambda \setminus \{a\}] > 0 .$$

Ist klar, welches Maß gemeint ist, so sagt man auch: $(X_t)_{t \in T}$ ist Markoff-Feld.

Anschaulich formuliert besagt die Eigenschaft (M.F.), daß für jedes $a \in T$ die Wahrscheinlichkeit, daß die Zufallsvariable X_a einen Wert ω_a annimmt, nur von den Werten der Zufallsvariablen in der Nachbarschaft abhängt.

4.6 Lokale Charakteristiken

1.) In der Situation von 4.5 sei für nicht leere, endliche Teilmengen A und Λ von T mit $A \subset \Lambda$ und $\omega = (\omega_t)_{t \in T}$

$P_A^\Lambda(\omega) := P[X_t = \omega_t \ \forall t \in A \mid X_t = \omega_t \ \forall t \in \Lambda \setminus A]$ und

$P_a^\Lambda(\omega) := P_{\{a\}}^\Lambda(\omega)$, sofern definiert.

Dann ist unter den Voraussetzungen von 4.5 die Eigenschaft (M.F.) äquivalent zu $P_a^\Lambda(\omega) = P_a^{\bar{a}}(\omega)$ für alle $a \in T$ und alle endlichen Teilmengen Λ von T mit $\Lambda \supset N(a) \cup \{a\}$ und alle $\omega \in \Omega$, für die beide Seiten definiert sind.

Die Zahlen $P_a^{\bar{a}}(\omega)$ heißen auch die lokalen Charakteristiken von $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

Für $a \in T$ wird durch $B \longrightarrow P[X_a \in B \mid X_t = \omega_t \ \forall t \in N(a)]$ für $B \in \mathfrak{B}(E)$ ein W-Maß auf $\mathfrak{B}(E)$ definiert, falls $P[X_t = \omega_t \ \forall t \in N(a)] > 0$ ist.

2.) Definiert man $\bar{A} := \{b \notin A \mid b \in N(a)$ für ein $a \in A\} \cup A$ für endliches $A \subset T$, dann gilt für Markoff-Felder $P_A^{\bar{A}}(\omega) = P_A^\Lambda(\omega)$ für alle endlichen Teilmengen A und Λ mit $A \subset \bar{A} \subset \Lambda$, sofern beide Seiten definiert sind.

4.7 Beispiel

Sind die $(X_t)_{t \in T}$ unabhängig, dann bilden sie stets ein Markoff-Feld. Für die lokalen Charakteristiken gilt dann: $P_a^{\bar{a}}(\omega) = P[X_a = \omega_a]$ für alle $a \in T$, sofern die linke Seite definiert ist.

4.8 Beispiel

1.) Sei P_ς das Maß auf dem Produktraum $\Omega = E^{\mathbb{N}_0}$, für das $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ kanonische Markoffkette (siehe 1.3) mit Übergangskern Q auf $(E, \mathcal{P}(E))$ und Startmaß ς auf $\mathcal{P}(E)$ ist, so daß für alle $n\in\mathbb{N}_0$ und $a\in E$ $P_\varsigma(X_n=a) < \infty$ gilt. (Letzteres ist z.B. dann der Fall, wenn das Startmaß ς endlich ist oder wenn ς σ-endlich und ς Q-invariant ist.)

Dann ist P_ς Markoff-Feld (mit dem Nachbarschaftssystem aus 4.4.2 für $\mathbb{N}_0$) mit lokalen Charakteristiken

$$(P_\varsigma)^{\bar{n}}_n(\omega) = \frac{Q(\omega_{n-1},\omega_n)\cdot Q(\omega_n,\omega_{n+1})}{Q^2(\omega_{n-1},\omega_{n+1})} \text{ für } n\in\mathbb{N},$$

falls $P_\varsigma(X_{n-1}=\omega_{n-1}, X_{n+1}=\omega_{n+1}) > 0$ ist, und

$$(P_\varsigma)^{\bar{o}}_o(\omega) = \frac{\varsigma(\omega_o)\cdot Q(\omega_o,\omega_1)}{(\varsigma Q)(\omega_1)}, \text{ falls } P_\varsigma(X_1=\omega_1) > 0,$$

für $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Beweis:

Für $n\in\mathbb{N}$ sei $\Lambda \supset \{n\}\cup N(n) = \{n-1,n,n+1\}$. Ohne Einschränkung sei $\Lambda = \{m,..,k\}$ mit $0 < m \le n-1$ und $k \ge n+1$.

Falls $P_\varsigma(X_i=\omega_i \ \forall i\in\Lambda\setminus\{n\}) > 0$ ist, gilt:

$$(P_\varsigma)^{\wedge}_n(\omega) = P_\varsigma[X_n=\omega_n \mid X_i=\omega_i \ \forall i\in\{m,..,k\}\setminus\{n\}]$$

$$= \frac{(\varsigma Q^m)(\omega_m)\ \prod_{i=m}^{k-1} Q(\omega_i,\omega_{i+1})}{(\varsigma Q^m)(\omega_m)\ \prod_{\substack{i=m\\ n-1\neq i\neq n}}^{k-1} Q(\omega_i,\omega_{i+1})\cdot Q^2(\omega_{n-1},\omega_{n+1})}$$

$$= \frac{Q(\omega_{n-1},\omega_n)\cdot Q(\omega_n,\omega_{n+1})}{Q^2(\omega_{n-1},\omega_{n+1})} = \frac{P_\varsigma[X_{n-1}=\omega_{n-1}, X_n=\omega_n, X_{n+1}=\omega_{n+1}]}{P_\varsigma[X_{n-1}=\omega_{n-1}, X_{n+1}=\omega_{n+1}]}$$

$$= P_\varsigma[X_n=\omega_n \mid X_{n-1}=\omega_{n-1}, X_{n+1}=\omega_{n+1}] = (P_\varsigma)^{\bar{n}}_n(\omega).$$

Für n=0 sei $\Lambda \supset \{0\}\cup N(0) = \{0,1\}$. Ohne Einschränkung sei $\Lambda = \{0,..,k\}$ mit $k\in\mathbb{N}$.

Falls $P_\varsigma(X_i=\omega_i \ \forall i\in\Lambda\setminus\{0\}) > 0$ ist, gilt:

$$(P_\varsigma)^{\wedge}_o(\omega) = P_\varsigma[X_o=\omega_o \mid X_i=\omega_i \ \forall i\in\{1,..,k\}]$$

$$= \frac{\varsigma(\omega_o)\ \prod_{i=o}^{k-1} Q(\omega_i,\omega_{i+1})}{(\varsigma Q)(\omega_1)\ \prod_{i=1}^{k-1} Q(\omega_i,\omega_{i+1})} = \frac{\varsigma(\omega_o)\, Q(\omega_o,\omega_1)}{(\varsigma Q)(\omega_1)}$$

$$= \frac{P_\xi[X_0=\omega_0, X_1=\omega_1]}{P_\xi[X_1=\omega_1]} = P_\xi[X_0=\omega_0 \mid X_1=\omega_1] = (P_\xi)^{\bar{0}}_0(\omega). \square$$

2.) Man sieht leicht, daß eine nicht homogene Markoff-kette (siehe 1.3.4) ebenfalls ein Markoff-Feld ist. Die lokalen Charakteristiken hängen dann natürlich von n ab.

Im folgenden sei $\mathfrak{Q}$ stets der Produktraum E^T mit abzählbaren Mengen E und T. Die σ-Algebra $\mathfrak{E}$ auf E sei stets die Potenzmenge von E. N sei ein Nachbarschaftssystem auf T.

4.9 Definition

Eine Familie $U = \{ U_A : \mathfrak{Q} \to \mathbb{R} \mid A$ endliche Teilmenge von $T \}$ heißt Potential auf T, falls gilt:

1) $U_\emptyset \equiv 0$.

2) Ist $\omega=(\omega_t)_{t\in T}$ und $\omega'=(\omega'_t)_{t\in T}$ mit $\omega_t=\omega'_t$ für $t\in A$, so ist $U_A(\omega) = U_A(\omega')$.

Ein Potential U heißt Nachbar-Potential, falls gilt: Ist A endliche Teilmenge von T und keine Clique, dann ist $U_A \equiv 0$.

Sei x_0 ausgezeichnetes Element in E. Das Potential U heißt normalisiert (bezgl. x_0), falls gilt: Ist $\omega_a = x_0$ für ein $a\in A$, so ist $U_A(\omega) = 0$. Ist E (Halb-)Gruppe, so sei x_0 stets das Einselement e.

4.10 Definition

Ein Maß P auf $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{F})$ heißt Nachbar-Gibbs-Feld mit Nachbar-Potential U, falls für alle $a\in T$ und alle endlichen Teilmengen Λ oberhalb $\bar{a}$ für eine geeignete Konstante $Z=Z(\omega_t$ mit $t\in\Lambda\setminus\{a\})$ - sofern definiert - $P^\Lambda_a(\omega) = Z^{-1}[\exp \sum_{a\in B\subset\Lambda} U_B(\omega)]$ ist.

Insbesondere ist also gefordert: $0 < Z < \infty$. Dann ist

$Z = \sum_{s \in E} \exp[\sum_{B \subset \Lambda, a \in B} U_B(\omega^s)]$, wobei $\omega^s = (\omega_t^s)_{t \in T}$ mit

$\omega_t^s := \begin{cases} \omega_t & \text{für } t \neq a \\ s & \text{für } t = a \end{cases}$ ist.

Da U Nachbar-Potential ist, hängt Z sogar nur von den ω_t mit $t \in N(a)$ ab (siehe Beweis zu Satz 4.11).

4.11 Satz

Ist P Nachbar-Gibbs-Feld mit Nachbar-Potential U, so ist P Markoff-Feld, falls $P(X_t = a) < \infty$ für alle $a \in E$ und $t \in T$ ist.

P heißt dann auch ein durch das Nachbar-Potential U bestimmtes Markoff-Feld.

Beweis:

Sei $a \in T$ und seien Λ, B endliche Teilmengen von T mit $\bar{a} \subset \Lambda$ und $a \in B \subset \Lambda$. Ist dann $b \in B$ mit $a \neq b$, so gilt, falls B Clique ist, $b \in N(a)$, also insgesamt $B \subset \bar{a}$.

Damit ist

$$P_a^{\Lambda}(\omega) = Z^{-1}[\exp \sum_{B \subset \Lambda} U_B(\omega)] = Z^{-1} \exp[\sum_{a \in B \subset \bar{a}} U_B(\omega)] = P_a^{\bar{a}}(\omega)$$

(sofern beide Seiten definiert sind), da nur über Cliquen summiert wird. P ist also Markoff-Feld. ⌟

4.12 Beispiel "Ising-Modell"

1.) Sei $T = \mathbb{Z}^d$ bzw. $T = \mathbb{N}_0^d$ $(d \in \mathbb{N})$ mit Nachbarschaftssystem gemäß 4.2. Nachbar-Potentiale sind nach 4.4 bestimmt durch $U_{\{a\}}$ und $U_{\{a,b\}}$ mit $|a-b| = 1$ (und 0 sonst).

Ist E die Gruppe $\{0,1\}$, so werden spezielle (bezgl. $x_0 = 0$) normalisierte Nachbar-Potentiale definiert durch Vorgabe von $v_0, v_1 \in \mathbb{R}$:

$U_{\{a\}}(\omega) := v_0$, falls $\omega_a = 1$, $U_{\{a,b\}}(\omega) := v_1$, falls $\omega_a = \omega_b = 1$ mit $|a-b| = 1$, und 0 sonst (für $\omega = (\omega_t)_{t \in T}$).

Solche Potentiale, die nur von dem Wert ω_a, nicht aber von der Stelle a abhängen, heißen homogene Potentiale.

Für $k \in \{0,..,2d\}$ sei $\upsilon_k(a) := \{n_1,..,n_k\} \subset N(a)$ eine Menge von k Nachbarn von a und

$A_{\upsilon_k(a)} := \{\omega = (\omega_t)_{t\in T} \mid \omega_t = 1 \text{ für } t \in \upsilon_k(a), \omega_t = 0 \text{ für } t \in N(a) \setminus \upsilon_k($

2.) Existiert dann ein durch das Potential U bestimmtes Markoff-Feld P, dann gilt gemäß 4.11 für die Charakteristiken, falls $P[A_{\upsilon_k(a)}] > 0$,

$P[X_a = 1 \mid A_{\upsilon_k(a)}] = Z^{-1} \exp(v_0 + k \cdot v_1)$ und

$P[X_a = 0 \mid A_{\upsilon_k(a)}] = Z^{-1}$, also $Z = 1 + \exp(v_0 + k \cdot v_1)$, d.h.

$P[X_a = 1 \mid A_{\upsilon_k(a)}] = [1 + \exp(-v_0 - k \cdot v_1)]^{-1}$.

3.) Spezialfälle

a) Ist $v_1 = 0$, so ist $P := \bigotimes_{a\in T} \mu$ mit $\mu := p \cdot \varepsilon_1 + (1-p) \cdot \varepsilon_0$,

wobei $p := [1 + \exp(-v_0)]^{-1}$ ist, ein W-Maß auf $\mathfrak{F}$ mit Charakteristiken gemäß Teil 2.).

b) Es gilt "Symmetrie", d.h. $P[X_a = 1 \mid A_{\upsilon_k(a)}] = P[X_a = 0 \mid A_{\upsilon_{2d-k}(a)}]$ für alle $a \in T$ genau dann, wenn $v_0 = -v_1 \cdot d$.

Dann ist $P[X_a = 1 \mid A_{\upsilon_k(a)}] = [1 + \exp((d-k) \cdot \frac{v_0}{d})]^{-1}$.

Beweis:

$P[X_a = 1 \mid A_{\upsilon_k(a)}] = P[X_a = 0 \mid A_{\upsilon_{2d-k}(a)}]$ genau dann, wenn

$[1 + \exp(-v_0 - k \cdot v_1)]^{-1} = [1 + \exp(v_0 + (2d-k) \cdot v_1]^{-1}$,

also $-v_0 - k \cdot v_1 = v_0 + (2d-k) \cdot v_1$ ist. Das heißt aber gerade $v_0 = -v_1 \cdot d$. ⊔

4.13 Definition

Für ein Markoff-Feld P sei $\mathcal{G}_P$ die Menge aller Markoff-Felder auf $(\Omega, \mathfrak{F})$, deren lokale Charakteristiken mit denen von P übereinstimmen, sofern sie definiert sind.

Es gibt zwei Fälle: 1) $\mathcal{G}_P = \{P\}$, also $|\mathcal{G}_P| = 1$ und

2) $|\mathcal{G}_P| > 1$.

Im zweiten Fall spricht man von Phasen-Übergang. Eine der entscheidenden Fragen, die im Kontext von Markoff-Feldern auftreten, ist: Wann existieren Phasen-Übergänge?

Wir definieren $\mathcal{E}_P := \{Q \in \mathcal{G}_P \mid Q \text{ extremal}\}$. Dabei heißt ein Maß $Q \in \mathcal{G}_P$ extremal, falls gilt:
Ist $Q = s \cdot Q_1 + (1-s) \cdot Q_2$ mit $Q_1, Q_2 \in \mathcal{G}_P$ und $s \in (0,1)$, so ist bereits $Q_1 = Q_2 (= Q)$.

4.14 Lemma
Die Menge $\mathcal{G}_P$ ist konvex.
Beweis:
Für $i=1,2$ seien $Q_i \in \mathcal{G}_P$. Zu zeigen ist $Q := s \cdot Q_1 + (1-s) \cdot Q_2 \in \mathcal{G}_P$. Ist für ein $a \in T$ und ein $\omega \in \Omega$ $P_a^{\bar{a}}(\omega)$ und $Q_a^{\bar{a}}(\omega)$ definiert, so auch $(Q_i)_a^{\bar{a}}(\omega)$ für ein i. Es gilt dann, wenn man noch $A := \{X_a = \omega_a\}$ und $B := \{X_t = \omega_t \ \forall\, t \in N(a)\}$ abkürzt:

$$Q_a^{\bar{a}}(\omega) = Q(A \mid B) = \frac{Q(A \cap B)}{Q(B)} = \frac{s \cdot Q_1(A \cap B) + (1-s) \cdot Q_2(A \cap B)}{s \cdot Q_1(B) + (1-s) \cdot Q_2(B)}$$

$$= \frac{s \cdot (Q_1)_a^{\bar{a}}(\omega) \cdot Q_1(B) + (1-s) \cdot (Q_2)_a^{\bar{a}}(\omega) \cdot Q_2(B)}{s \cdot Q_1(B) + (1-s) \cdot Q_2(B)} = (Q_i)_a^{\bar{a}}(\omega) = P_a^{\bar{a}}(\omega),$$

also $Q \in \mathcal{G}_P$, falls beide $(Q_i)_a^{\bar{a}}(\omega)$ existieren. Existiert nur ein $(Q_i)_a^{\bar{a}}(\omega)$, so bleibt die Aussage ebenfalls richtig. ⌟

4.15 Folgerung
$|\mathcal{G}_P| > 1$ gilt genau dann, wenn $|\mathcal{G}_P| = \infty$ ist.

4.16 Bemerkung

Der Fall $T = \mathbb{Z}^d$ $(d \in \mathbb{N})$ ist bisher ausführlich untersucht worden. Hier wurden allerdings stets strikt positive Zylinderwahrscheinlichkeiten vorausgesetzt, d.h. $P[X_t = \omega_t,\ t \in A] > 0$ für alle endlichen Teilmengen A von T und für alle $\omega = (\omega_t)_{t \in T} \in \Omega$.

Die wichtigsten Resultate sind:

1.) Ist E endlich, so sind in $E^{\mathbb{Z}}$ homogene Markoff-Felder durch homogene Nachbar-Potentiale eindeutig bestimmt. Es gibt also keine Phasen-Übergänge (DOBRUSHIN [6]), speziell beim Ising-Modell in $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$.

Ist $|E| = \infty$, so sind in $E^{\mathbb{Z}}$ alle Fälle möglich (SPITZER[25]).

2.) Der Satz von Dobrushin läßt sich nicht auf das Ising-Modell in $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ verallgemeinern:

Mit den Bezeichnungen von 4.12 gilt für symmetrische Potentiale:

Falls $v_1 \geq 0$ (U attraktiv) ist, gibt es für "genügend großes" v_1 Phasen-Übergänge (DOBRUSHIN[5] und GRIFFITHS[12]). Dieser kritische Wert wurde ermittelt von GALLAVOTTI[11]:
Phasen-Übergang findet genau dann statt, wenn $v_1 > 2 \cdot \log(\sqrt{2}+1) \sim 0.766$ ist.

Die extremalen Felder sind nicht bekannt. Man vermutet, es existieren zwei (SPITZER[24], IV.Remarque(4)).

Ergebnisse für $v_1 < 0$ (U repulsiv) sind analog.

3.) Im dreidimensionalen Ising-Modell ($\{0,1\}^{\mathbb{Z}^3}$) liegt für hinreichendes großes v_1 Phasen-Übergang vor. Der kritische Wert ist noch unbekannt. Man weiß, daß bei Phasen-Übergang abzählbar unendlich viele extremale Felder existieren (DOBRUSHIN[7]).

Der letzte Teil des Kapitels ist dem Studium der Markoff-Felder mit Parameterraum $T = \mathbb{N}_0$ gewidmet. Hierbei werden Markoff-Felder in $E^{\mathbb{N}_0}$ mit E Gruppe und die im vorigen Kapitel behandelten Raum-Zeit-Irrfahrten zu Exponentialfamilien in Zusammenhang gebracht.

Wir wissen bereits, daß Markoffketten auf $\Omega = E^{\mathbb{N}_0}$ mit geeignetem Startmaß Markoff-Felder sind (vgl. 4.8). Hiervon gilt auch eine gewisse Umkehrung:

4.17 Satz

1.) Ein Maß P ist Markoff-Feld auf $E^{\mathbb{N}_0}$ (mit dem Nachbarschaftssystem aus 4.2.2 auf $\mathbb{N}_0$) genau dann, wenn P (inhomogene) Markoffkette mit Ü-Kernen $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist, wobei für $a,b\in E$ mit $P(X_n=a)>0$ $Q_n(a,b)=P[X_{n+1}=b \mid X_n=a]$ ist und für alle $a\in E$ und $n\in\mathbb{N}_0$ $P(X_n=a)<\infty$ erfüllt ist.

2.) Ist P zusätzlich Shift-invariant, so ist die Markoffkette sogar homogen.

Beweis:

zu 1.): Eine Markoffkette mit $P(X_n=a)<\infty$ für alle $a\in E$ und $n\in\mathbb{N}_0$ ist bereits ein Markoff-Feld (siehe 4.8). Sei umgekehrt P ein Markoff-Feld auf $E^{\mathbb{N}_0}$. Wir zeigen die Markoff-Eigenschaft 1.2.2 a): Für $\omega=(\omega_i)_{i\in\mathbb{N}_0}\in E^{\mathbb{N}_0}$ und $n\in\mathbb{N}_0$ mit $P[X_i=\omega_i,\ i=0,..,n]>0$ gilt:

$$\frac{P[X_{n+1}=\omega_{n+1} \mid X_i=\omega_i, i=0,.,n]}{P[X_{n+1}=\omega_{n+1} \mid X_n=\omega_n]} = \frac{P[X_i=\omega_i, i=0,.,n+1]\cdot P[X_n=\omega_n]}{P[X_i=\omega_i, i=0,.,n]\,P[X_n=\omega_n, X_{n+1}=\omega_{n+1}]}$$

$$= \frac{P[X_i=\omega_i, i=0,..,n-1 \mid X_n=\omega_n, X_{n+1}=\omega_{n+1}]}{P[X_i=\omega_i, i=0,..,n-1 \mid X_n=\omega_n]}$$

$$4.6\ \frac{P_{\{0,.,n+1\}}(\omega)}{P_{\{0,.,n\}}(\omega)} \cdot \frac{P_{\{0,.,n-1\}}(\omega)}{P_{\{0,.,n-1\}}(\omega)} = 1 \text{ nach 4.6.2 mit } A:=\{0,..,n-1\}$$

($\bar{A}$ ist dann $\{0,..,n\}$) und $\Lambda:=\{0,.,n+1\}$, falls $P[X_i=\omega_i, i=0,.,n+1]>0$ ist. Sonst gilt die Aussage ebenfalls.

zu 2.): Für $n,k\in\mathbb{N}_0$ und $a,b\in E$ mit $P[X_n=a]>0$ ist

$$P[X_{n+k+1}=b \mid X_{n+k}=a] = \frac{P[X_{n+k+1}=b, X_{n+k}=a]}{P[X_{n+k}=a]} = \frac{P[X_{n+1}=b, X_n=a]}{P[X_n=a]}$$

$= P[X_{n+1}=b \mid X_n=a]$, also folgt die Homogenität der Kette aus der Shift-Invarianz. ⌟

Wie wir aber gleich feststellen werden, kann durchaus Phasen-Übergang auftreten, d.h. verschiedene Markoff-ketten können als Markoff-Felder dieselben Charakteristiken besitzen.

4.18 Satz

Ist $(\Omega, \mathfrak{F}, X_n, P_\varsigma)$ kanonische Markoffkette mit Ü-Kern Q auf $(E, \mathfrak{P}(E))$ und Startmaß ς, so daß $P_\varsigma(X_n=a) < \infty$ für alle $a \in E$ und $n \in \mathbb{N}_o$ gilt, und ist h eine Q-harmonische Funktion, so besitzt das zum Ü-Kern Q^h und Startmaß $h\varsigma$ gehörige Maß $P^h_{h\varsigma}$ (siehe 1.6.2) dieselben lokalen Charakteristiken wie P_ς (sofern beide definiert sind). Existiert also eine harmonische Funktion $h \neq 1$, dann besteht Phasen-Übergang.

Diese Aussage gilt auch für Raum-Zeit-Ketten.

Beweis:

Zunächst sind nach Satz 4.17 P_ς und $P^h_{h\varsigma}$ Markoff-Felder auf $E^{\mathbb{N}_o}$, da für $a \in E$ und $n \in \mathbb{N}_o$ nach 1.6.2 $P^h_{h\varsigma}(X_n=a) = P_\varsigma(X_n=a)\cdot h(a) < \infty$ ist.

Für $n \in \mathbb{N}$ und $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}_o}$ mit $P^h_{h\varsigma}[X_{n-1}=\omega_{n-1}, X_{n+1}=\omega_{n+1}] > 0$ ist

$$(P^h_{h\varsigma})^{\bar{n}}_n(\omega) = \frac{Q^h(\omega_{n-1},\omega_n)\cdot Q^h(\omega_n,\omega_{n+1})}{(Q^h)^2(\omega_{n-1},\omega_{n+1})}$$

$$= \frac{h(\omega_{n-1})^{-1}\cdot Q(\omega_{n-1},\omega_n)\cdot h(\omega_n)\cdot h(\omega_n)^{-1}\cdot Q(\omega_n,\omega_{n+1})\cdot h(\omega_{n+1})}{h(\omega_{n-1})^{-1}\cdot Q^2(\omega_{n-1},\omega_{n+1})\cdot h(\omega_{n+1})}$$

$$= \frac{Q(\omega_{n-1},\omega_n)\cdot Q(\omega_n,\omega_{n+1})}{Q^2(\omega_{n-1},\omega_{n+1})} = (P_\varsigma)^{\bar{n}}_n(\omega) \quad \text{und}$$

$$(P^h_{h\varsigma})^{\bar{o}}_o(\omega) = \frac{(h\varsigma)(\omega_o)\cdot Q^h(\omega_o,\omega_1)}{[(h\varsigma)Q^h](\omega_1)} = \frac{\varsigma(\omega_o)\cdot Q(\omega_o,\omega_1)\cdot h(\omega_1)}{(\varsigma Q)(\omega_1)\cdot h(\omega_1)}$$

$$= \frac{\varsigma(\omega_o)\cdot Q(\omega_o,\omega_1)}{(\varsigma Q)(\omega_1)} = (P_\varsigma)^{\bar{o}}_o(\omega), \quad \text{falls } P^h_{h\varsigma}(X_1=\omega_1) > 0 \text{ ist.} \quad \square$$

Von Satz 4.18 gilt folgende Umkehrung (KEMENY-SNELL-KNAPP [16], 12.33):

4.19 Satz

Seien P_o und P_1 Markoff-Felder auf $\Omega = E^{\mathbb{N}_o}$, die -sofern definiert - dieselben lokalen Charakteristiken besitzen, mit

(V1) $P_o \gg P_1$ auf $\mathfrak{F}_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_o$.

Bezeichnet man mit $\tilde{Q}_o$ und $\tilde{Q}_1$ die Raum-Zeit-Übergangskerne der gemäß 4.17 mit diesen Markoff-Feldern assoziierten (inhomogenen) Markoffketten und mit E' den natürlichen Zustandsraum, also $E' = \{(x,n) \in E \times \mathbb{N}_o \mid P_o(X_n = x) > 0\}$, dann gilt:

Es existiert eine auf E' $\tilde{Q}_o$-harmonische Funktion h, so daß auf E' $\tilde{Q}_1$ "h-Kern" zu $\tilde{Q}_o$ ist, und es ist $P_1 = h(X_n, n)\, P_o$ auf $\mathfrak{F}_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_o$.

Beweis:

Für $(a,n) \in E'$ sei $h(a,n) := \dfrac{P_1[X_n = a]}{P_o[X_n = a]}$. Dann ist h $\tilde{Q}_o$-harmonisch in allen Punkten von E', denn für $(a,n) \in E'$ gilt:

$$\tilde{Q}_o h(a,n) = \sum_{b \in E} h(b,n+1)\, \tilde{Q}_o[(a,n),(b,n+1)]$$

$$= \sum_{b \in E} \frac{P_1[X_{n+1}=b]}{P_o[X_{n+1}=b]} \cdot P_o[X_{n+1}=b \mid X_n = a]$$

$$\overset{*}{=} \sum_{b \in E} \frac{P_1[X_{n+1}=b, X_n=a]}{P_o[X_{n+1}=b, X_n=a]} \cdot P_o[X_{n+1}=b \mid X_n = a]$$

$$= \sum_{b \in E} \frac{P_1[X_{n+1}=b, X_n=a]}{P_o[X_n=a]} = h(a,n),$$

wobei nur über die b summiert wird, für die $P_o(X_{n+1}=b) > 0$ erfüllt ist.

Hierbei gilt $*$, weil wegen Phasen-Übergang für $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}_o} \in \Omega$ einerseits

$$\frac{P_1[X_{n+1}=\omega_{n+1}]}{P_o[X_{n+1}=\omega_{n+1}]} = \frac{P_1[X_{n+1}=\omega_{n+1}]}{P_o[X_{n+1}=\omega_{n+1}]} \cdot \frac{P_1[X_i=\omega_i, i=0,..,n \mid X_{n+1}=\omega_{n+1}]}{P_o[X_i=\omega_i, i=0,..,n \mid X_{n+1}=\omega_{n+1}]}$$

$$= \frac{P_1[X_i=\omega_i, i=0,..,n+1]}{P_0[X_i=\omega_i, i=0,..,n+1]}$$ (aus dieser Gleichheit folgt sofort die letzte Behauptung des Satzes) und andererseits analog

$$\frac{P_1[X_n=\omega_n, X_{n+1}=\omega_{n+1}]}{P_0[X_n=\omega_n, X_{n+1}=\omega_{n+1}]} \cdot \frac{P_1[X_i=\omega_i, i=0,..,n-1 \mid X_n=\omega_n, X_{n+1}=\omega_{n+1}]}{P_0[X_i=\omega_i, i=0,..,n-1 \mid X_n=\omega_n, X_{n+1}=\omega_{n+1}]}$$

dasselbe ergibt, falls beide Ausdrücke definiert sind.
Für $(a,n),(b,n+1) \in E'$ ist

$$\tilde{Q}_0^h[(a,n),(b,n+1)] = \frac{h(b,n+1)}{h(a,n)} \cdot \tilde{Q}_0[(a,n),(b,n+1)]$$

$$= \frac{P_1[X_{n+1}=b]}{P_0[X_{n+1}=b]} \cdot \frac{P_0[X_n=a]}{P_1[X_n=a]} \cdot P_0[X_{n+1}=b \mid X_n=a]$$

$$= \frac{P_1[X_{n+1}=b, X_n=a]}{P_0[X_{n+1}=b, X_n=a]} \cdot \frac{P_0[X_n=a]}{P_1[X_n=a]} \cdot P_0[X_{n+1}=b \mid X_n=a] = P_1[X_{n+1}=b \mid X_n=a]$$

$= \tilde{Q}_1[(a,n),(b,n+1)]$, falls $P_1[X_n=a] > 0$. Andernfalls sind beide Seiten 0. Auf E' ist also $\tilde{Q}_1$ "h-Kern" zu $\tilde{Q}_0$. ⊣

4.20 Korollar

Unter den Voraussetzungen von Satz 4.19 gilt:
Das Maß P_1 ist genau dann extremal, d.h. $P_1 \in \mathcal{E}_{P_0}$ (siehe Definition 4.13), wenn die Funktion h extremal (auf dem natürlichen Zustandsraum) ist.

Beweis:

Sei P_1 extremal. h besitze die Darstellung $h = s \cdot h_1 + (1-s) \cdot h_2$ mit h_i $\tilde{Q}_0$-harmonisch (auf E') für i=1,2 und $s \in (0,1)$. Mit N_i bezeichnen wir für i=1,2 die Markoff-Felder, die gemäß Satz 4.18 (für R-Z-Ketten) mit den "h_i-Ketten" assoziiert sind. Die N_i haben dieselben Charakteristiken wie P_0 (falls sie definiert sind), also $N_i \in \mathcal{E}_{P_0}$. Nun gilt für $n \in \mathbb{N}_0$ auf $\mathfrak{F}_n$ nach Satz 4.19

$P_1 = h(X_n,n) P_0 = s \cdot h_1(X_n,n) P_0 + (1-s) \cdot h_2(X_n,n) P_0$

$= s \cdot N_1 + (1-s) \cdot N_2$. Nach Voraussetzung folgt $P_1 = N_1 = N_2$, also $h = h_1 = h_2$ auf E'.

Sei jetzt umgekehrt $P_1 = s \cdot N_1 + (1-s) \cdot N_2$ mit $N_i \in \mathcal{E}_{P_0}$ für $i=1,2$ und $s \in (0,1)$. Nach Satz 4.19 existieren wegen $P_0 \gg P_1 \gg N_1$ auf jedem $\mathfrak{F}_n$ $\tilde{Q}_0$-harmonische Funktionen h_i auf E'. mit $h = s \cdot h_1 + (1-s) \cdot h_2$. Da extremal ist, folgt hieraus sofort die Behauptung. ⌟

Bevor wir die Sätze 4.18 und 4.19 für Gruppen konkretisieren, leiten wir noch ein vorbereitendes Lemma her.

4.21 Lemma

Sei E diskrete Gruppe und μ ein W-Maß auf $\mathcal{P}(E)$ mit Bedingung (GT) (siehe 3.7). Ist h eine in allen Punkten des natürlichen Zustandsraums E' $\tilde{\mu}$-harmonische (also R-Z-harmonische) , extremale und strikt positive Funktion auf E' mit $h(e,0)=1$, so läßt sich h zu einem Exponential auf $E \times \mathbb{N}_0$ fortsetzen.

Beweis:

Analog 3.28 ist h Exponential auf $H(\tilde{\mu}) = E'$(siehe Bemerkung 3.13). Wegen Bedingung (GT) existiert zu jedem $(x,n) \in E \times \mathbb{N}_0$ ein $(y,m) \in E'$ mit $(x \cdot y, n+m) \in E'$. Definiert man dann $h(x,n) := h(x \cdot y, n+m) \cdot [h(y,m)]^{-1}$, so ist die Definition unabhängig von dem speziell gewählten $(y,m) \in E'$, und h ist - wie man leicht sieht - Exponential auf ganz $E \times \mathbb{N}_0$. ⌟

Wir kommen jetzt zu der angekündigten Zusammenfassung:

4.22 Satz

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ Irrfahrt mit Startmaß ϱ und Verteilung μ auf der diskreten Gruppe E mit Bedingung (GT) und P_ϱ das (siehe 1.3) zugehörige Maß auf dem Produktraum $E^{\mathbb{N}_0}$ mit $P_\varrho(X_n = a) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $a \in E$.
Dann sind extremale Markoff-Felder N mit $N \sim P_\varrho$ auf jedem $\mathfrak{F}_n$, die dieselben lokalen Charakteristiken besitzen wie die R-Z-Kette (X_n, n) genau die Raum-Zeit-Ketten zu Irrfahrten mit Verteilung aus der zu μ gehörigen Exponentialfamilie.

Beweis:
Extremale Markoff-Felder $N \in \mathfrak{F}_{P_1}$ sind nach 4.19 bereits h-Ketten mit extremalem h auf dem natürlichen Zustandsraum E'. Wegen $N \sim P_\xi$ auf jedem $\mathfrak{A}_n$ ist h strikt positiv auf E'. Nach Lemma 4.21 sind diese Funktionen (fortsetzbar zu) Exponentiale(n) auf $E \times \mathbb{N}_0$, d.h. von der Form $h:(x,n) \to \xi(x)\cdot Z^n$, wobei ξ Exponential von E und Z Konstante ist. Für den nach 4.19 zu N gehörenden R-Z-Übergangskern $\tilde{Q}_1$ gilt dann: $\tilde{Q}_1$ ist Faltungskern mit $\tilde{Q}_1[(e,0),(x,1)] = h(x,1)\ \mu(x) = \xi(x)\cdot Z\cdot\mu(x)$ für $x \in E$, also R-Z-Kette zur Irrfahrt mit Verteilung aus der Exponentialfamilie zu μ.
Umgekehrt besitzen R-Z-Ketten aus einer Exponentialfamilie, also h-Ketten mit h Exponential auf $E \times \mathbb{N}_0$ nach Satz 4.18 (Version für R-Z-Ketten) als Markoff-Felder dieselben lokalen Charakteristiken. Da Exponentiale auf Gruppen strikt positiv sind, besitzen die Felder dieselben Träger. Die Exponentiale sind nach Korollar 3.30 extremal, also nach 4.20 auch die Felder. ⌟

4.23 Beispiel
Wir betrachten auf $(E,\cdot)=(Z,+)$ die Exponentialfamilie $(\mu_a)_{a>0}$ mit $\mu_a(x)=a^x/x!\cdot e^{-a}$ für $x \in \mathbb{N}_0$, also Poisson-Verteilungen (siehe Beispiel 3.32.1). Sei P_a das Maß auf $\Omega = Z^{\mathbb{N}_0}$, für das $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Markoffkette mit Faltungskern zu μ_a und Startmaß ε_0 ist.
Für die lokalen Charakteristiken $(P_a)_n^{\bar{n}}(\omega)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in Z^{\mathbb{N}_0}$ mit $\omega_{n-1} \le \omega_n \le \omega_{n+1}$ gilt:

$$(P_a)_n^{\bar{n}}(\omega) = \frac{\mu_a(\omega_n-\omega_{n-1})\cdot\mu_a(\omega_{n+1}-\omega_n)}{\mu_a^2(\omega_{n+1}-\omega_{n-1})}$$

$$= \frac{a^{\omega_n-\omega_{n-1}}\cdot e^{-a}\cdot a^{\omega_{n+1}-\omega_n}\cdot e^{-a}\cdot(\omega_{n+1}-\omega_{n-1})!}{(\omega_n-\omega_{n-1})!\cdot(\omega_{n+1}-\omega_n)!\cdot(2a)^{\omega_{n+1}-\omega_{n-1}}\cdot e^{-2a}}$$

$$= \frac{(\omega_{n+1}-\omega_{n-1})!}{(\omega_n-\omega_{n-1})!\cdot(\omega_{n+1}-\omega_n)!\cdot 2^{\omega_{n+1}-\omega_{n-1}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\omega_{n+1}-\omega_{n-1}}\binom{\omega_{n+1}-\omega_{n-1}}{\omega_n-\omega_{n-1}}$$

und $(P_a)_o^{\bar{o}}(\omega)=1$ für alle $\omega=(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}_o}\in Z^{\mathbb{N}_o}$ mit $\omega_o=0\leq\omega_1$.

Der Zusammenhang zwischen Markoff-Feldern und Exponentialfamilien erlaubt uns, die Resultate aus Kapitel III auf Markoff-Felder anzuwenden. So gilt folgendes Analogon zum Satz von Dobrushin (siehe 4.16.1):

4.24 Satz

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_o}$ Irrfahrt auf der endlichen Gruppe E mit endlichem Startmaß ϱ und Verteilung μ, so daß (GT) erfüllt ist, und P_ϱ das zugehörige Maß auf dem Produktraum $E^{\mathbb{N}_o}$. Fassen wir P_ϱ als Markoff-Feld auf, so gilt:
Jedes Markoff-Feld Q auf $E^{\mathbb{N}_o}$ mit $Q\sim P_\varrho$ auf jedem $\mathfrak{F}_n$, welches dieselben lokalen Charakteristiken wie P_ϱ besitzt, fällt bereits mit P_ϱ zusammen.

Beweis:

Sei Q ein Markoff-Feld auf $E^{\mathbb{N}_o}$ mit den genannten Bedingungen. Nach 4.19 ist Q als Raum-Zeit-Kette bereits "h-Kette" zu P_ϱ. Nach 3.34.1 existieren aber zu Raum-Zeit-Irrfahrten auf endlichen Gruppen, deren Verteilung (GT) erfüllen, außer der Konstanten 1 keine extremalen und damit keine harmonischen Funktionen $h\neq 1$ auf $E\times\mathbb{N}_o$, also ist $Q=P$. ⊔

LITERATURVERZEICHNIS

[1] A.F.ABRAHAMSE:
A comparison between the Martin boundary theory and the theory of likelihood ratios,
Ann. Math. Stat. 41 (1970), 1064-1067.

[2] R.AZENCOTT:
Marches aléatoires sur les groupes localement compacts,
Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Série A 268 (1969), 1406-1409.

[3] R.AZENCOTT:
Espaces de Poisson des Groupes Localement Compacts,
Lecture Notes in Math. 148, Springer, Berlin, 1970.

[4] H.BAUER:
Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie,
de Gruyter, Berlin, 1974.

[5] R.L.DOBRUSHIN:
Existence of phase transition in the two-dimensional and three-dimensional Ising models,
Theory Probab. Appl. 10 (1965), 193-213.

[6] R.L.DOBRUSHIN:
The description of a random field by means of conditional probabilities and conditions of its regularity,
Theory Probab. Appl. 13 (1968), 197-224.

[7] R.L.DOBRUSHIN:
Gibbs state describing coexistence of phases for a three-dimensional Ising model,
Theory Probab. Appl. 17 (1972), 582-600.

[8] J.L.DOOB:
Stochastic Processes
Wiley, New York, 1953.

[9] J.L.DOOB, J.L.SNELL und R.E.WILLIAMSON:
Application of boundary theory to sums of
independent random variables, in:
Contributions to Probability and Statistics,
Stanford, 1960, 182-197.

[10] W.FELLER:
An Introduction to Probability Theory and
Its Applications, Vol.II,
Wiley, New York, 1966.

[11] G.GALLAVOTTI:
Instabilities and phase transition in the
Ising model,
Rivista del Nuovo Cimento 2 (1972), 133-169.

[12] R.B. GRIFFITHS:
Peierl's proof of spontaneous magnetization
in a two-dimensional Ising ferromagnet,
Phys. Rev. 136 (1964), 437-439.

[13] E.HEWITT und K.A.ROSS:
Abstract Harmonic Analysis I,
Springer, Berlin, 1963.

[14] E.HEWITT und L.J.SAVAGE:
Symmetric measures on Cartesian products,
Trans. Am. Math. Soc. 80 (1955), 470-501.

[15] H.HEYER:
Mathematische Theorie statistischer Experimente,
Springer, Berlin, 1973.

[16] J.G.KEMENY, J.L.SNELL und A.W.KNAPP:
Denumerable Markov Chains,
Van Nostrand, Princeton, 1976.

[17] S.L.LAURITZEN:
General exponential models for discrete observations,
Scand. J. Statist. 2 (1975), 23-33.

[18] L.H.LOOMIS:
An Introduction to Abstract Harmonic Analysis,
Van Nostrand, Princeton, 1953.

[19] P.A.MEYER:
Probability and Potentials,
Blaisdell, Waltham, 1966.

[20] D.REVUZ:
Markov Chains,
North-Holland Publishing Company,
Amsterdam, 1975.

[21] J.ROUDIER:
Châine de Markov μ-continue à l'infini,
Ann. Inst. Henri Poincaré B 8 (1972), 241-248.

[22] W.RUDIN:
Fourier Analysis on Groups,
Interscience Publishers, New York, 1967.

[23] H.SIEGEL:
Integraldarstellung harmonischer Funktionen für Markoff-Ketten auf Gruppen,
Düsseldorf, 1978, Diplom-Arbeit.

[24] F.SPITZER:
Introduction aux processus de Markov à paramètre dans Z_ν , in :
Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour III,
New York, 1974, 114-189.

[25] F.SPITZER:
Phase transition in one-dimensional nearest-neighbor systems,
J. Functional Anal. 20 (1975), 240-255.

INDEX

asymptotisch(e Ereignisse)	1.5.3
ausgebreitet	2.19
(B1)	3.2
(B2)	3.2
(B3)	3.4
(B4)	3.24
(B4')	3.26
Bezugsfunktion	1.8.2
Charakteristiken, lokale	4.6
Clique	4.3
duale Kette	1.7.4
Dualität	1.7.4
Exponential	2.8
Exponentialfamilie	3.1
extremal(e Funktion)	1.6.5
extremal(es Maß)	4.13
Faltung von Funktionen	2.16
Faltung von Maßen	2.2
Faltungskern	2.3
(GT)	3.7.1
(GT')	3.7.4
Gruppe, topologische	2.1
(HT)	3.7.1
(HT')	3.7.6
Haarmaß	2.15
Halbgruppe, topologische	2.1
Halb-Verband	2.14.1
(μ -)harmonisch	2.6
(Q-)harmonisch	1.6.1
h-Kern	1.6.2
h-Kette	1.6.2
Homogenität (der Kette)	1.2.2
idempotent	2.14.1
invariant(e Ereignisse)	1.5.2
(Q-)invariant	1.7.1

Irrfahrt	2.3
Ising-Modell	4.12
Kern	1.1
Markoff-Eigenschaft	1.2.2
Markoff-Feld	4.5
Markoffkette, homogene	1.2.1
Markoffkette, kanonische	1.3.1
Markoffsch	1.1
Martinrand	1.8.2
Meßraum, kanonischer	1.3
Nachbar-Gibbs-Feld	4.10
Nachbar-Potential	4.9
Nachbarschaftssystem	4.1
normalisiert	4.9
Parameterraum	4.5
Phasen-Übergang	4.13
Pfad	1.3.1
Potential	4.9
Potential, homogenes	4.12
Potentialkern	1.8.1
Produkt von Kernen	1.1
R(aum)-Z(eit)-Kette	1.4
Seite	2.10
Shift-invariant	1.7.2
Shift-Operator	1.5.1
$\mathfrak{A}$ -Algebra der Vergangenheit	1.2.1
$\mathfrak{A}'$ -Algebra der Zukunft	1.5.1
Spiegelung von Maßen	2.17.2
Startmaß	1.2.3
(τ -)stetig	2.19
(τ -)stetig im Unendlichen	3.18
terminal(e Ereignisse)	1.5.3
Trajektorien	1.3.1
Ü(bergangs)-Kern	1.1
(V1)	4.19
Zustandsraum	1.2.1, 4.5

Herrn Prof.Dr.Janßen danke ich herzlich für die Anregung zu dieser Arbeit und für seine Betreuung während der Anfertigung.